K. Weierstrass.

O TAK NAZWANEJ ZASADZIE DIRICHLETA [1].

Lejeune Dirichlet w wykładach swych o siłach działających według prawa Newtona, posługuje się, celem uzasadnienia twierdzenia głównego teoryi potencyału, szczególnym sposobem wnioskowania, które było później wielokrotnie stosowane i przez innych matematyków, zwłaszcza przez Riemanna i otrzymało nazwę „zasady Dirichleta".

Później ujawniły się niektóre wątpliwości co do stosowalności tej „zasady"; wątpliwości te, jak to poniżej wykażę, są zupełnie uzasadnione. Ponieważ wszakże sam Dirichlet w tym przedmiocie drukiem nic nie ogłosił, więc przedewszystkiem pozwolę sobie na podstawie starannego odpisu, przygotowanego przez p. Dedekinda, przytoczyć to miejsce z wykładu Dirichleta w półroczu letniem 1856, z którego najwyraźniej się okazuje, co Dirichlet myślał i w jaki sposób starał się uzasadnić metodę swego dowodzenia.

---

[1]) Rzecz czytana w król. Akademii nauk w Berlinie dnia 14 lipca 1870 r., ogłoszona poraz pierwszy w Tomie II „Dzieł matematycznych Weierstrassa" w r. 1895, str. 49—54.

W artykule p. t. „Karol Weierstrass" w Tomie I „Wiadomości matematycznych" (na str. 57) oraz w rozprawie W. Dycka: „O związkach wzajemnych pomiędzy matematyką czystą a stosowaną" w tymże tomie „Wiadomości" (na str. 164) wspomniano, iż Weierstrass wykazał, że rozumowanie analityczne, stosowane wielokrotnie w fizyce matematycznej i nazwane przez Riemanna „zasadą Dirichleta", ścisłem nie jest. Doniosłe to spostrzeżenie, miało wielkie znaczenie w rozwoju nauki, bo pobudziło do szukania nowych i ścisłych metod uzasadnienia twierdzeń teoryi funkcyi i fizyki matematycznej. Z tego powodu podajemy tu w przekładzie uwagi krytyczne wielkiego geometry niemieckiego, którym zawdzięczamy tak ważny postęp nauki. (Porówn. wyżej cytowaną rozprawę Dycka). *S. D.*

„Jeżeli daną jest powierzchnia skończona, to można ją zawsze i to jednym tylko sposobem, pokryć masą tak, aby potencyał w każdym punkcie powierzchni miał wartość, dowolnie z góry przepisaną (zmieniającą się sposobem ciągłym)".

„Aby tego dowieść, podajmy najprzód twierdzenie:

„Jeżeli daną jest pewna przestrzeń skończona i spójna t, to istnieje zawsze jedna i tylko jedna funkcya w, która wraz z swą pierwszą pochodną zmienia się w przestrzeni t sposobem ciągłym, na ograniczeniu przestrzeni t przybiera wszędzie wartości dowolnie przepisane (zmieniające się sposobem ciągłym), i wewnątrz t czyniące zadość równaniu":

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

„Twierdzenie to jest oczywiście identyczne z innem twierdzeniem z teoryi ciepła, które każdemu odrazu wydaje się oczywistem, mianowicie, że gdy ograniczenie przestrzeni t utrzymujemy wszędzie w stałej, dowolnie przepisanej temperaturze, to istnieje jeden i tylko jeden rozkład temperatury we wnętrzu, dla którego zachodzi równowaga; albo też, mówiąc inaczej, gdy temperatura pierwotna była we wnętrzu dowolną, to zbliża się ona do stanu ostatecznego, w którym zachodzi równowaga".

„Uzasadnimy to twierdzenie na podstawie oczywistości czystomatematycznej. W samej rzeczy jest jasnem, że pomiędzy wszystkiemi funkcyami u, które wraz ze swemi pochodnemi zmieniają się sposobem ciągłym w przestrzeni t, a na ograniczeniu tej przestrzeni przyjmują wartości określone, musi istnieć funkcya (jedna lub więcej), która całce

$$U = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dt,$$

rozciągniętej na całą przestrzeń t, nadaje wartość najmniejszą. Taką właśnie funkcyę oznaczmy przez u, a minimum całki przez U. Jeżeli u' jest inną funkcyą, spełniającą te same warunki graniczne i warunki ciągłości, jakie spełnia funkcya u, i jeżeli U' jest odpowiednią wartością całki, wtedy $U' - U$ nie może być nigdy ujemnem. Jeżeli więc położymy $u + hw = u'$, gdzie h oznacza czynnik stały nieoznaczony, to funkcya w będzie spełniała te same warunki co u i u', na ograniczeniu będzie zerem, zresztą wszędzie dowolną. Znajdujemy wtedy z łatwością:

$$U' - U = 2hM + h^2 N ,$$

gdzie

$$M = \int \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} dt ,$$

$$N = \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} dt$$

„Za pomocą całkowania przez części, przy uwzględnieniu warunków dla granic i ciągłości funkcyi w oraz warunków ciągłości dla pierwszych pochodnych funkcyi u, znajdujemy łatwo:

$$M = - \int w \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} dt$$

„Ponieważ $U' - U$ dla żadnej wartości jakkolwiek małej h nigdy nie może być ujemnem, N zaś jest ilością dodatnią, to wynika stąd, że M jest koniecznie zerem. Ponieważ zaś musi to być bez względu na naturę funkcyi w, przeto wnosimy stąd, że wszędzie wewnątrz t (przy wyłączeniu, co najwyżej, pojedyńczych powierzchni, linij, punktów) musi być:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 .$$

„Gdyby bowiem ten trójmian wewnątrz uważanej przestrzeni nie był różny od zera, to dość byłoby nadać wszędzie ilości w ten sam znak, jaki posiada trójmian, aby otrzymać na M wartość różną od zera.

„Istnieje więc w każdym razie funkcya u, spełniająca podane warunki graniczne oraz warunki ciągłości i czyniąca zarazem zadość równaniu różniczkowemu cząstkowemu. Taka funkcya u jest nadto jedną i jedyną. Gdyby bowiem $u' = u + w$ było drugą taką funkcyą, spełniającą też same warunki na granicy i warunki ciągłości, to odpowiednią całką byłoby:

$$U' = U + \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} dt$$

a więc U jest istotnie bezwzględnem minimum; gdyby zaś było $U' = U$, wtedy musiałoby być w całej przestrzeni t:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = 0 .$$

„Stąd wynikałoby, że funkcya w jest ilością stałą; a ponieważ jest ona ciągłą i na ograniczeniu przestrzeni t równą zeru, musi być przeto wszędzie zerem, stąd u' musi być identyczne z u.

„Później okażemy, że ta funkcya u, spełniająca warunki graniczne i warunki ciągłości, i o której wiemy, że co najwyżej w pewnych punktach, liniach lub powierzchniach nie sprawdza równania różniczkowego cząstkowego, musi czynić zadość temu równaniu wszędzie, t. j. w każdym punkcie, tak że takie miejsca wyjątkowe są niemożliwe“.

Wyłożone wyżej postępowanie Dirichleta w założeniu, — iż wogóle istnieje funkcya, czyniąca zadość w przestrzeni t wskazanym warunkom granicznym i warunkom ciągłości — ma służyć do okazania istnienia funkcyi zmiennych x, y, z, czyniącej zadość równaniu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

i zarazem powyższym warunkom. Ostatnią część tego twierdzenia w każdym określonym przypadku okazać łatwo; pierwsza zaś jest prawdziwą tylko w tym przypadku, w którym można dowieść, że istnieje funkcya u, dla której wartość wyrażenia

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dt$$

jest minimum (bezwzględnem). Tego w żaden sposób z założeń Dirichleta wywnioskować nie można; wolno twierdzić tylko, że dla wyrażenia powyższego istnieje określona granica niższa, do której ono może się zbliżyć dowolnie, w rzeczywistości jej nie osiągając. Z tego to powodu rozumowanie Dirichleta jest błędnem.

Poprzedzającą uwagę wyjaśnię na prostym przykładzie, który uwidoczni nieścisłość rozumowania Dirichleta.

Niechaj $\varphi(x)$ będzie funkcyą rzeczywistą, jednowartościową zmiennej rzeczywistej x, taką, że: po pierwsze, $\varphi(x)$ i $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ są funkcyami ciągłemi w przedziale $(-1, \ldots +1)$; po drugie, $\varphi(x)$ na granicy -1 ma wartość z góry daną a, na granicy $+1$ wartość z góry daną b. Obie stałe a i b niechaj będą różnemi wielkościami. Gdyby rozumowanie Dirichleta było dopuszczalnem, wtedy pomiędzy rozważanemi funkcyami $\varphi(x)$ musiałaby się znaleść taka funkcya specyalna, dla której wartość całki

$$J = \int_{-1}^{+1} \left(x \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx$$

byłaby równą granicy niższej wszystkich tych wartości, które całka ta przyjmuje dla różnych funkcyj $\varphi(x)$, należących do rozważanej kategoryi.

Ta granica niższa jest atoli w rozważanym przypadku koniecznie zerem; jeżeli położymy bowiem np.:

$$\varphi(x) = \frac{a-b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}$$

gdzie ε jest dowolną ilością dodatnią, to funkcya ta czyni zadość pierwszym dwóm warunkom; a ponieważ

$$J < \int_{-1}^{+1} (x^2 + \varepsilon^2) \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx ,$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{b-a}{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

przeto dla tej specyalnej funkcyi jest:

$$J < \varepsilon \cdot \frac{(b-a)^2}{\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}\right)^2} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{\varepsilon\, dx}{x^2 + \varepsilon^2},$$

a więc:

$$J < \frac{\varepsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ponieważ ε można uczynić dowolnie małem, więc widać stąd, że granica niższa wartości J jest zerem, gdyż wartości ujemnych J nie może wcale przyjmować.

Lecz wartości tej całka J osiągnąć nie może bez względu na to, jakie warunki wybierzemy dla funkcyi $\varphi(x)$. Gdy bowiem $\varphi(x)$ i $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ są ciągłemi, to aby to stać się mogło, trzeba, by funkcya $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ znikała dla każdej wartości x w przedziale $(-1 \ldots +1)$, t. j. aby $\varphi(x)$ było ilością stałą. To zaś sprzeciwia się przyjęciu, że ilości a i b są różnemi od siebie.

Rozumowanie Dirichleta prowadzi tedy w tym przypadku do fałszywego wyniku.