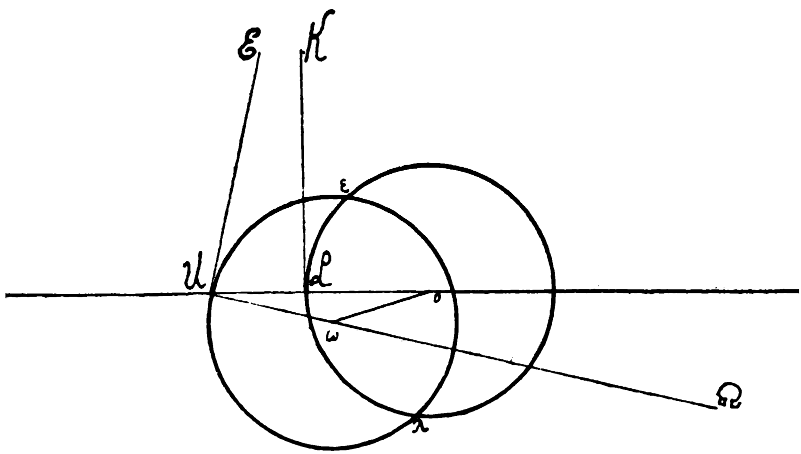
matematycznemu w Kazaniu za ocenę dzieł uczestniczących w konkursie przyznano na temże posiedzeniu dnia 3 listopada 1897 r. prof. F. Kleinowi w Getyndze za referat o dziele Liego [1]).

Referaty o dziełach Gérarda, Cesàro i Fontenégo złożyli pp. Suworow, Seiliger i Nasimow, członkowie komisyi, w której pracach brali nadto udział pp. Dubiago, Kotelnikow, Sincow.

ZAGADNIENIE 6.

podał ksiądz Aleksander Dąbrowski.

Niechaj będą dwie proste *EU* i *KL*, z których pierwsza tworzy z prostą X_1X kąt prosty, druga kąt $EUX = \vartheta$, mniejszy od prostego. Z punktu *U* poprowadźmy prostą $U\Omega$, prostopadłą do linii *EU*. Promieniem *R*, większym od $UL = a$, nakreślmy dwa koła, jedno styczne do prostej *EU* w punkcie *U*, drugie



styczne do prostej *KL* w punkcie *L*; połączmy środki tych kół, przecinających się w punktach ε i λ, prostą ωo. Przeprowadźmy szereg podobnych wykreśleń zmieniając *R* od wartości, odpowiadającej przypadkowi zewnętrznej styczności kół, aż do $R = \infty$; otrzymamy wtedy szeregi punktów przecięcia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Punkty te połączone utworzą pewną krzywą. Znaleść równanie tej krzywej.

[1]) Streszczenie tego referatu podane wyżej na str. 58—61.

ROZWIĄZANIA ZAGADNIEŃ.

Zagadnienie 3[1]) (Wiad. mat. l. 1897, str. 137). Wyobraźmy sobie powierzchnię krzywą P i przeprowadźmy płaszczyznę F tak, aby ta ostatnia wraz z pierwszą ograniczała stałą objętość. Dowieść, że wszystkie takie płaszczyzny są styczne do pewnej powierzchni, która dotyka każdej z nich w środku ciężkości figury przecięcia.

Rozwiązanie p. M. H. Horwitza (Gandawa).

1. Dowiedźmy, że płaszczyzny F, odcinające od powierzchni krzywej P jednakowe objętości, są styczne do pewnej powierzchni. Niechaj bądą:

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0\,,$$

odpowiednio równania powierzchni P i płaszczyzny zmiennej F.

Równanie

$$\int\int\int dx\, dy\, dz = C\,, \tag{1}$$

gdzie całka potrójna rozciągniętą być winna na wszystkie punkty, zawarte między F i P, wyraża, że objętość, zamknięta między temi powierzchniami, jest stała. Do równania tego wchodzą parametry stałe, cechujące formę funkcyi f, stała C oraz parametry zmienne α, β, γ. Jest ono zatem formy:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0\,. \tag{1'}$$

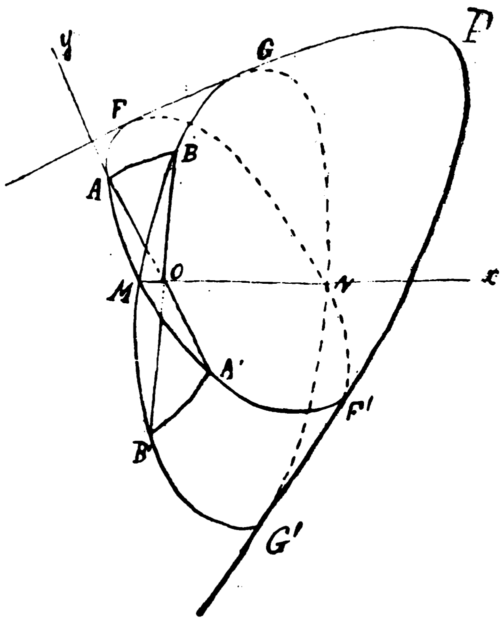
Otóż równanie takie, gdzie na α, β, γ patrzeć możemy jako na spółrzędne tangencyalne płaszczyzny zmiennej F, jest równaniem pewnej powierzchni Π stycznej do wszystkich płaszczyzn, czyniących mu zadość[2]). Dwie płaszczyzny F albo (α, β, γ) i G albo $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$ nieskończenie blizkie, sprawdzające równanie (1') przecinają się według prostej MN, która, w miarę zbliżania się G do F według pewnego określonego lecz dowolnego, czyniącego jedynie zadość równaniu (1'), prawa,—zdąża do pewnego położenia granicznego na płaszczyznie F. Wszystkie tego rodzaju proste graniczne, leżące na płaszczyznie F, mają jeden punkt wspólny, zwany punktem charakterystycznym płaszczyzny F. Powierzchnia Π jest miejscem geometrycznem

[1]) Podane przez p. T. Rudzkiego.

[2]) Patrz np. E. Dauge, Leçons de Méthodologie mathématique, wyd. 2-gie, 1896, str. 429—431.

tych punktów i dotyka każdej z płaszczyzn F w jej punkcie charakterystycznym.

2. Niechaj (na fig.) P będzie daną powierzchnią, FF' i GG' dwiema płaszczyznami nieskończenie blizkiemi, czyniącemi zadość równaniu (1), MN prostą przecięcia FF' z GG'. Obierzmy prostokątny układ osi, w którym osią x-ów niech będzie prosta MN, osią y-ów przecięcie się FF' z płaszczyzną normalną do MN w dowolnym punkcie O.



Powierzchnie P, FF' i GG' określają w płaszczyznie tej wycinki przeciwległe AOB i $A'OB$. Ciała $MNFG$ i $MNFG'$ mają oczywiście jednakową objętość, co wyrazimy równaniem:

$$\int \sigma\, dx = \int \sigma' dx \,, \tag{2}$$

gdzie σ i σ' są odpowiednio powierzchniami wycinków AOB i $A'OB'$ Kładąc:

$$OA = a \quad \text{i} \quad OA' = a' \,,$$

mamy

$$\sigma = a^2 \sin AOB + \varepsilon \; , \; \sigma' = a'^2 \sin AOB + \varepsilon' \; ,$$

gdzie ε i ε' są nieskończenie małemi względem $a^2 \sin AOB$ i $a'^2 \sin AOB$. Równanie (2) sprowadza się zatem do

$$\int a^2 dx - \int a'^2 dx = 0 \; .$$

Gdy GG' zbliża się nieograniczenie do FF', układ osi xoy zdąża do położenia granicznego XOY, nieskończenie mało różniącego się od xoy, zatem spółrzędne x i y ulegną również jedynie zmianom nieskończenie małym, które znikają w całkach. Równanie

$$\int y^2 dx - \int y_1{}^2 dx = 0 \tag{3}$$

zachodzić będzie tedy z całą zupełną ścisłością między spółrzędnemi krzywej FF', odniesionej do osi XOY. Przypomnijmy, że oś OX jest granicą prostej MN przecięcia się 2-ch nieskończenie blizkich płaszczyzn FF' i GG', czyniących zadość równaniu (1).

Równanie (3) napisać można tak:

$$\int y dy \int dx - \int y_1 dy_1 \int dx = 0 \; ,$$

albo

$$\int \int_g y \, dy dx - \int \int_d y \, dy \, dx \; ,$$

gdzie pierwsza całka podwójna rozciągnięta jest na część krzywej FF', leżącą nad osią x-ów, druga na część, leżącą pod tą osią.

Otóż, z drugiej strony, odcięta ξ środka ciężkości powierzchni krzywej FF' daną jest przez równanie:

$$\xi \left(\int_g y \, dx - \int_d y \, dx \right) = \int \int_g y \, dy dx - \int \int_d y \, dy \, dx \; ,$$

a ponieważ wogóle powierzchnia krzywej FF' różni się od zera, będzie więc:

$$\xi = 0 \; .$$

Czyli, że środek ciężkości powierzchni krzywej FF' leży na osi OX; ponieważ już OX jest jedną, dowolnie wziętą z prostych granicznych, o których mowa w końcu ustępu 1, omawiany zatem środek ciężkości zlewa się z punktem wspólnym wszystkim tym prostym czyli z punktem charakterystycznym płaszczyzny *FF'*. A więc powierzchnia Π dotyka płaszczyzny *FF'* w środku ciężkości figury jej przecięcia z powierzchnią *P*.

Zagadnienie 5 [1]). („Wiad. matem. I. 1897, str. 217). Mając dane cztery punkty *A*, *B*, *C* i *D*, położone jakkolwiek na płaszczyznie, wyznaczyć piąty punkt *S* tak, aby promienie *SB* i *SD* były dwusiecznemi kąta *ASC*.

Rozwiązanie p. M. Feldbluma (Łódź).

Promienie *SA*, *SB*, *SC*. *SD* tworzą oczywiście pęk harmoniczny, w którym pary promieni sprzężonych są: *SA* i *SC*, *SB* i *SD*. Jeżeli przez 5 punktów: *S*, *A*, *B*, *C*, *D* poprowadzimy przecięcie stożkowe, a w punkcie *A* styczną *AT* do tej krzywej, to pęk *AB*, *AC*, *AD*, *AT* jako rzutowy (jednokreślny) z pękiem *SB*, *SC*, *SD*, *SA*, będzie również harmoniczny. Zważywszy to. oraz przyjąwszy pod uwagę, że kąt *BSD* jest prosty, znajdziemy następujące rozwiązanie danego zagadnienia.

Poprowadźmy proste *AB*, *AC*, *AD* i wykreślmy promień *AT*, harmonicznie sprzężony z promieniem *AC* względem pary promieni *AB* i *AD*; poprowadźmy następnie przecięcie stożkowe przez punkty *A*, *B*, *C*, *D*, któreby w pierwszym z tych punktów było styczne do prostej *AT*. Szukane położenia punktu *S* znajdują się na przecięciu tej krzywej z okręgiem koła, wykreślonego na odcinku *BD*, jako na średnicy.

Sprowadziliśmy zadanie dane do następnego: „znaleść miejsce geometryczne punktu takiego, ażeby promienie łączące go z 4-ma punktami danemi tworzyły pęk harmoniczny"; szukane miejsce geometryczne jest określonem przecięciem stożkowem. Temu ostatniemu odpowiada według zasady dwoistości zagadnienie następujące: „znaleść miejsce geometryczne prostej, którąby cztery dane proste przecinały w 4-ch punktach harmonicznych"; łatwo się przekonać, że i to miejsce geometryczne stanowi określone przecięcie stożkowe (do którego szukana prosta jest styczna).

Rozwiązanie, oparte na podobnej zasadzie, co powyższe, nadesłał p. Alfons Lewenberg inż. mech. (Ruda Pabianicka), dołączywszy do niego nadto wskazówki co do ułatwień wykreślnych.

---

[1]) Podane przez p. Z. Straszewicza (Kamienskoje).

Дозволено Цензурою, Варшава 4 Февраля 1897 г. Druk J. Sikorskiego, Warecka Nr. 14.