ZAGADNIENIA.

Rozwiązanie Zagadnienia 1 (Wiad. matem. Nr. 1, str. 51—52).

a) Rozwiązanie p. Z. Krygowskiego (Paryż).

Połóżmy $\frac{x_0+x_1}{2}=m$, $\frac{x_0-x_1}{2}=n$; według wzoru Taylora będzie:

$$(1)\quad \begin{cases} f(x_0)=f(m)+nf'(m)+\frac{n^2}{1\,.\,2}f''(m)+\dots \\ f(x_1)=f(m)-nf'(m)+\frac{n^2}{1\,.\,2}f''(m)+\dots \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} f'(x_0)=f'(m)+nf''(m)+\frac{n^2}{2}f'''(m)+\dots \\ f'(x_1)=f'(m)-nf''(m)+\frac{n^2}{2}f'''(m)+\dots \end{cases}$$

Z równań (1) mamy:

$$f(x_0)-f(x_1)=2nf'(m)+\frac{n^3}{3}f'''(m)\ ;$$

Z równań (2):

$$f'(x_0)+f'(x_1)=2f'(m)+n^2f'''(m)\ .$$

Stąd:

$$n^2f'''(m)=f'(x_0)+f'(x_1)-2f'(m)\ ;$$

$$f(x_0)-f(x_1)=2nf'(m)+n\ .\ \frac{f'(x_0)+f'(x_1)-2f'(m)}{3}$$

$$=\frac{n}{3}\Big[f'(x_0)+f'(x_1)+4f'(m)\Big]\ ,$$

$$=\frac{x_0-x_1}{6}\left[f'x_0)+f'(x_1)+4f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right]\ .$$

Jeżeli $x_0=a$, $x_1=b$ są pierwiastkami wielomianu $f(x)$, będzie z poprzedniego:

$$f'(a)+f'(b)+4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0 \text{ i t d.}$$

Inne związki, podane w zagadnieniu, wyprowadzają się już z łatwością

b) Rozwiązanie p. M. H. Horwitza (Gand).

Rozwińmy różnicę fx_0-fx_1 według wzoru Taylora:

$$fx_0-fx_1=\frac{x_0-x_1}{1}f'x_1+\frac{(x_0-x_1)^2}{1.2}f''x_1+\frac{(x_0-x_1)^3}{1.2\,3}f'''x_1+\frac{(x_0-x_1)^4}{1.2.3.4}f^{IV}x_1$$

$$=\frac{x_0-x_1}{6}\left[f'x_1+f'x_1+\frac{x_0-x_1}{1}f''x_1+\frac{(x_0-x_1)^2}{1.2}f'''x_1+\frac{(x_0-x_1)^3}{1.2.3}f'''x_1\right.$$

$$\left.+4f'x_1+4.\frac{\frac{x_0-x_1}{2}}{1}f''x_1+4\frac{\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)^2}{1.2}f''x_1+4\frac{\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)^3}{1.2.3}f''x_1\right]$$

$$=\frac{x_0-x_1}{6}\left[f'x_1+f'x_0+4f'\left(x_1+\frac{x_0-x_1}{2}\right)\right]=\frac{x_0-x_1}{6}\left[f'x_0+f'x_1+4f'\frac{x_0+x_1}{2}\right]$$

Zatem:

$$fx_0-fx_1=\left(\frac{x_0-x_1}{6}\right)\left[f'x_0+f'x_1+4f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)\right] \tag{1}$$

Z (1) wyprowadzamy

$$f'x_0+f'x_0+4f'\frac{x_0+x_1}{2}=6.\frac{fx_0-fx_1}{x_0-x_1}.$$

Jeżeli a i b są dwoma różnemi pierwiastkami równania $fx=0$, mamy:

$$fa=fb=0 \qquad a \gtrless b\,,$$

a więc

$$f'a+f'b+4f'\frac{a+b}{2}=0 \tag{2}$$

Wywód dalszych związków pomijamy.

c) Rozwiązanie p. Niewęgłowskiego (w Bulletin de mathématiques spéciales, luty 1897), polega na następującem twierdzeniu, łatwem do okazania: Każda funkcya $\varphi(x)$ postaci $F(x)+ax^3+ex$, gdzie $F(x)$ jest funkcyą parzystą, sprawdza tożsamość:

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = \frac{x}{3}\left[\varphi'(x) + \varphi'(-x) + 4\varphi'(0)\right].$$

d) Zagadnienie nasze może być uogólnione (uogólnienie to podał niedawno Laisant, bez dowodu w „Bulletin de la Société mathématique de France“, Zeszyt 8-y 1896) w sposób następujący:

Jeżeli h oznacza średnią arytmetyczną pierwiastków $a_1, a_2 \ldots a_m$ wielomianu $f(x)$ stopnia m, wtedy zachodzą następujące tożsamości:

$$\sum_{i=1}^{m} f^{(m-3)}(a_i) + \frac{m^2(m-3)}{2} f^{(m-3)}(h) = 0,$$

$$\sum_{c=1}^{m} f^{(m-2)}(a_i) + m(m-2) f^{(m-2)}(h) = 0.$$

Związki te łatwo udowodnić można, wyrażając pochodne $(m-3)$-ą i $(m-2)$-ą wielomianu stopnia m-go: $f(x) = c_0 x^m - c_1 x^{m-1} + c_2 x^{m-2} \ldots$, wykonywując sumowanie wskazane w powyższych wzorach i uwzględniając znane związki Newtonowskie pomiędzy spółczynnikami równania a sumami potęg pierwiastków. Kładąc w pierwszym z powyższych wzorów $m=4$, otrzymujemy

$$f'(a) + f'(b) + f'(c) + f'(d) + 8f'\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) = 0$$

t. j. związek podany w zagadnieniu Niewęgłowskiego.

Zagadnienie 2-gie,

podał M. H, Horwitz (Gand).

Jeżeli

$$\begin{vmatrix} a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \\ a''', & b''', & c''' \end{vmatrix} = 0,$$

to wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 0, & ab'-ba', & ac'-ca' \\ ab''-ba'', & 0, & cb''-bc'' \\ ac'''-ca''', & bc'''-cb''', & 0 \end{vmatrix}$$

jest podzielny przez

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{vmatrix}.$$

Zagadnienie 3.

podał T. Rudzki (Ryga).

Wyobraźmy sobie powierzchnię krzywą P i przeprowadźmy płaszczyznę F tak, aby ta ostatnia wraz z pierwszą ograniczała stałą objętość. Dowieść, że wszystkie takie płaszczyzny są styczne do pewnej powierzchni, która dotyka każdej z nich w środku ciężkości figury przecięcia.

ODEZWA.

Przystępując do druku „Bibliografii matematycznej polskiej XIX stulecia“ [1]), pragniemy sprawdzić dokładnie nasze wykazy bibliograficzne i dlatego udajemy się do Autorów z uprzejmą prośbą, aby pod adresem Redakcyi „Prac matematyczno-fizycznych“, zechcieli nadsyłać spisy wszystkich prac naukowych, ogłoszonych przez Nich w dziedzinie matematyki i jej zastosowań, tak w polskim jak i w obcych językach.

S. Dickstein i *E. Wawrykiewicz.*

Warszawa, w maju 1897 r.

OGŁOSZENIE.

Wyszedł z druku Tom VIII-y „Prac matematyczno-fizycznych, wydawanych przez S. Dicksteina, Wł. Gosiewskiego, Edw. i Wł. Natansonów, A. Witkowskiego i K. Żorawskiego“ i zawiera następujące arty-

[1]) Zeszyt próbny tej „Bibliografii“ wydany został w r. 1894.