SPOSÓB WYRÓWNYWANIA TABLIC ŚMIERTELNOŚCI

według **Corneille'a i L. Landre'a** [1]),

podał

B. Danielewicz.

Jednym z najważniejszych rezultatów statystyki ruchu ludności są t. zw. tablice śmiertelności. Tablice wszakże, obliczone wprost z danych statystycznych, przedstawiają się w formie nieregularnej, wykazują śmiertelność niedość prawidłowo się zmieniającą, Nieprawidłowość taka jest przeciwną naturze śmiertelności normalnej; niepodobna bowiem przypuścić, aby śmiertelność normalna nie zachowywała jakiejś prawidłowej ciągłości w swych zmianach; aby przy nieznacznej zmianie wieku, wykonywała niczem niedające się usprawiedliwić zwroty lub nagłe skoki. Przyczyny tego objawu mogą być rozmaite; za jednę z ważniejszych przyjąć trzeba trudności, z jakiemi wszelkiego rodzaju obserwacye, a więc i zbieranie dat statystycznych, są połączone. Trudności te pociągają za sobą błędy, a błędy stają się powodem nieprawidłowości, objawiających się w tablicach, formowanych wprost z danych statystycznych.

Ażeby nadać tablicom śmiertelności właściwą regularność (Graduation), rezultaty bezpośredniej obserwacyi poddaje się odpowiedniej operacyi rachunkowej, zwanej wyrównywaniem tablicy śmiertelności (Graduation of mortality table). Odnośnych metod istnieje już wiele, lecz względnie bardzo prostą opisał p. Landré i tę chcemy tu przedstawić.

Niech $y=f(x)$ przedstawia liczbę osób żyjących w wieku x lat, wtedy $f(x+1)$ będzie liczbą osób żyjących w wieku lat $x+1$; prawdopodobieństwem przeżycia roku jest $\frac{f(x+1)}{f(x)}$, prawdopodobieństwem zaś śmierci w ciągu roku wyrażenie:

$$(1) \qquad 1-\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)}\,.$$

---

[1]) „Assecuranz-Jahrbuch" A. Ehrenzweiga za r. 1894.

Prawdopodobieństwem śmierci w ciągu h lat jest:

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{f(x)}, \text{ gdzie } h \lesseqgtr 1. \tag{2}$$

Iloraz

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x)} \tag{3}$$

stanowi przeciętne prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku, wyprowadzone z zaobserwowanej w ciągu h lat śmiertelności. Skoro np. prawdopodobieństwo śmierci w ciągu miesiąca o 31 dniach jest:

$$\frac{f(x)-f\left(x+\frac{31}{365}\right)}{f(x)}, \text{ to}$$

$$\frac{f(x)-f\left(x+\frac{31}{365}\right)}{\frac{31}{365}fx)} = \frac{365}{31}\cdot\frac{f(x)-f\left(x+\frac{31}{365}\right)}{f(x)} \tag{4}$$

oznacza prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku, przy założeniu, że przez cały rok umiera codziennie ta sama liczba osób, jaka średnio dziennie umierała w ciągu uważanego miesiąca.

Gdy h, stale malejąc, zbliży się nieograniczenie do zera, wyrażenie (3) przedstawi roczne prawdopodobieństwo śmierci, wyprowadzone ze śmiertelności momentalnej, i to prawdopodobieństwo, oznaczane zazwyczaj przez μ_x, pozyskało nazwę **natężenia śmiertelności** (Force of mortality).

Ponieważ $f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)$, gdzie θh razem z h dąży do zera, zatem:

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{hf(x)} = -\frac{f'(x+\theta h)}{f(x)},$$

czyli, gdy h maleje nieograniczenie,

$$\mu_x = -\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

Gompertz przyjął, że począwszy od pewnego wieku, zawartego pomiędzy 15 a 20 rokiem życia, natężenie śmiertelności zmienia się według postępu geometrycznego, t. j. że

$$-\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = b\cdot q^x, \tag{6}$$

gdzie b i q są stałe, zmieniające się z tablicą.

Makeham zaś, poprawiając Gompertza, założył, iż nie natężenia śmiertelności, lecz ich różnice zmieniają się według postępu geometrycznego, czyli

$$-\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = a+b\cdot q^x, \tag{7}$$

gdzie znów trzy stałe a, b i q zmieniają się z tablicą.

Z (7) wypada:

$$-\frac{dy}{y} = a\,.\,dx+b\,.\,q^x\,.\,dx,$$

stąd:

$$-\log y = ax + \frac{b\,.\,q^x}{\log q}, \text{ albo } \log\frac{c}{y} = ax + \frac{b\,.\,q^x}{\log q}.$$

Z ostatniego wyrażenia otrzymujemy:

$$\frac{c}{y} = e^{ax+\frac{b\,.\,q^x}{\log q}}, \text{ lub } \frac{c}{y} = e^{ax}\,.\,e^{\frac{b\,.\,q^x}{\log q}},$$

stąd zaś

$$y = c\,.\,e^{-ax}\ e^{-\frac{b\,.\,q^x}{\log q}},$$

czyli gdy użyjemy, dla uproszczenia wzoru, oznaczeń:

$$e^{-a} = k,\quad e^{-\frac{b}{\lg q}} = g,$$

będzie:

(8) $$y = c\ \ k^x \, . \, gq^x$$

Ze wzoru tego, na prawdopodobieństwo przeżycia roku, wypada

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{c \, . \, k^{x+1} \, . \, gq^{x+1}}{c \, . \, k^x \, . \, gq^x} = k \, . \, g^{(q-1)}q^x ,$$

albo, po podstawieniu $g^{q-1} = f$, prawdopodobieństwo przeżycia roku równa się $k \, . \, fq^x$, zaś prawdopodobieństwo śmierci w ciągu roku:

(9) $$w_x = 1 - k \, . \, fq^x$$

Zakładając we wzorze (8) i (9): $a = 0$, $k = 1$, otrzymujemy wzory Gompertza

(10) $$y = c \, . \, gq^x \quad \text{i} \quad w_x = 1 - fq^x$$ (11).

Do zasady Makehama można wprowadzić pewne uproszczenie.

Makeham przyjął, że różnice pomiędzy natężeniami śmiertelności zmieniają się według postępu geometrycznego. Jakkolwiek natężenie śmiertelności różni się od rocznego prawdopodobieństwa śmierci, to jednak różni się od niego, zwłaszcza w wieku od lat 20 do 80, tak mało, że jedno za drugie, bez wielkiego błędu, podstawione być może, czyli gdy roczne prawdopodobieństwo śmierci dla osoby x letniej, oznaczymy przez w_x, można założyć:

(13) $$w_x = p + q \, . \, r^x ,$$

gdzie p, q, r są stałe.

Chodzi właśnie o oznaczenie pomienionych stałych w ten sposób, aby (13) dawało na w_x możliwie jak najbardziej przybliżone do otrzymanych z obserwacyi wartości.

Niech z obserwacyi otrzymanemi prawdopodobieństwami śmierci będą: w'_{20}; w'_{21}; w'_{22} i t. d.

Ażeby obrachować p, q i r, obierzmy trzy wieki: dwa skrajne (w_{20} i w_{80}) i jeden średni (w_{50}), i otrzymane dla nich roczne prawdopodobieństwa śmierci podstawmy za w_x w (13). Wtedy mieć będziemy trzy równania, pozwalające obliczyć p, q i r. Ponieważ jednak prawdopodobieństwa śmierci lat sąsiednich nie powinny się zbyt od siebie różnić, zatem, aby tę okoliczność uwzględnić, zamiast w' lepiej użyć średnio-arytmetycznych z trzech sąsiednich prawdopodobieństw śmierci, które oznaczmy przez w'', t. j.

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} w''_{21} = \frac{1}{3}(w'_{20} + w'_{21} + w'_{22}) \\ w''_{51} = \frac{1}{3}(w'_{50} + w'_{51} + w'_{52}) \\ w''_{81} = \frac{1}{3}(w'_{80} + w'_{81} + w'_{82}). \end{cases}$$

Tym sposobem z (13) otrzymujemy trzy równania:

$$(14) \qquad \begin{cases} w''_{21} = p + q \; r^{21} \\ w''_{51} = p + q \cdot r^{51} \\ w''_{81} = p + q \cdot r^{81} \end{cases}$$

Z równań tych można obliczyć p, q i r, mianowicie:

$$(15) \qquad r^{30} = \frac{w''_{81} - p}{w''_{51} - p} = \frac{w''_{51} - p}{w''_{21} - p},$$

stąd:

$$(16) \qquad p = \frac{w''_{21}\, w''_{81} - (w''_{51})^2}{w''_{21} + w''_{81} - 2\, w''_{51}}$$

Następnie

$$(17) \qquad r^{30} = \frac{w''_{81} - w''_{51}}{w''_{51} - w''_{21}},$$

skąd

$$\log r = \frac{1}{30} \cdot \left\{ \log (w''_{81} - w''_{51}) - \log (w''_{51} - w''_{21}) \right\}.$$

Dla oznaczenia q z (14) mamy następujące trzy wyrażenia:

$$\log q = \log (w''_{21} - p) - 21 \log r = \log (w''_{51} - p) - 51 \log r =$$
$$= \log (w''_{81} - p) - 81 \log r,$$

z których najlepiej jest użyć średnio-arytmetycznej, t. j.

$$(18)\ \log q = \frac{1}{3} . \{ \log (w''_{21} - p) + \log (w''_{51} - p) + \log (w''_{81} - p) \} - 51 \log r.$$

Wszakże oznaczone tym sposobem p, q i r nie czynią jeszcze zadość wszystkim warunkom; uwzględniliśmy bowiem, dla ich oznaczenia, tylko dziewięć prawdopodobieństw (a), wziętych z obserwacyi, podczas gdy na nie wpłynąć powinny wszystkie.

Przypuśćmy, że uwzględnienie wszystkich zaobserwowanych prawdopodobieństw śmierci pociąga za sobą poprawki: Δp, Δq i Δr — tak, iż rzeczywistemi wartościami stałych w wyrażeniu (13) nie są przed chwilą oznaczone p, q i r, lecz $p + \Delta p$, $q + \Delta q$ i $r + \Delta r$.

Oznaczywszy:

$$(13') \qquad w_x = p + q r^x = f(p, q, r),$$

mamy:

$$(19) \quad f(p + \Delta p, q + \Delta q, r + \Delta r) = f(p, q, r) + \frac{df}{dp} . \Delta p + \frac{df}{dq} . \Delta q + \frac{df}{dr} . \Delta r,$$

gdzie wyższe potęgi różnic opuszczamy.

Z (13') wypada

$$\frac{df}{dp} = 1; \ \frac{df}{dq} = r^x; \ \frac{df}{dr} = x . q . r^{x-1},$$

a ponieważ

$$r^x = \frac{w_x - p}{q},$$

zatem

$$\frac{df}{dp} = 1; \ \frac{df}{dq} = \frac{w_x - p}{q}; \ \frac{df}{dr} = \frac{x(w_x - p)}{r},$$

skoro więc oznaczymy:

$$f(p+\Delta p, q+\Delta q, r+\Delta r) - f(p, q, r) = \Delta w_x,$$

otrzymujemy:

$$\Delta w_x = \Delta p + \frac{w_x - p}{q} . \Delta q + \frac{x(w_x - p)}{r} . \Delta r \tag{20}$$

Gdy w $w_x = p + q . r^x$ podstawimy oznaczone wartości na p, q i r (16), (17) i (18) i zakładając kolejno $x = 20, 21, 22$ i t. d., obliczymy $w_{20}, w_{21}, w_{22} \ldots$, to z ich porównania z zaobserwowanemi prawdopodobieństwami śmierci $w'_{20}, w'_{21}, w'_{22} \ldots$ wypadną różnice:

$$w'_{20} - w_{20} = \Delta w_{20},\ w'_{21} - w_{21} = \Delta w_{21},\ w'_{22} - w_{22} = \Delta w_{22}, \ldots,$$

które podstawiwszy w (20), otrzymamy 60 równań:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta p + \dfrac{w_{20} - p}{q} . \Delta q + \dfrac{20(w_{20} - p)}{r} . \Delta r = \Delta w_{20} \\ \Delta p + \dfrac{w_{21} - p}{q} . \Delta q + \dfrac{21(w_{21} - p)}{r} . \Delta r = \Delta w_{21} \\ \qquad \text{i t. d.} \qquad\qquad \text{i t. d.} \end{array}\right. \tag{21}$$

albo, używając dla krótkości jednogłoskowych oznaczeń:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta p + h_{20} . \Delta q + k_{20} . \Delta r = m_{20} \\ \Delta p + h_{21} . \Delta q + k_{21} . \Delta r = m_{21} \\ \Delta p + h_{22} . \Delta q + k_{22} . \Delta r = m_{22} \\ \quad \text{i t. d.} \qquad\qquad \text{i t. d.} \end{array}\right. \tag{22}$$

Z tych 60 równań trzeba oznaczyć najodpowiedniejsze wartości na Δp, Δq i Δr. Do tego celu użyć należy metody najmniejszych kwadratów. Według tej metody, jak wiadomo, szereg n równań

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = f_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = f_2, \\ \text{i t. d.} \\ a_n x + b_n y + c_n z = f_n, \end{array}\right.$$

po ich kolejnem pomnożeniu przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i dodaniu, sprowadza się do trzech równań:

$$\left\{\begin{array}{l} x\,\Sigma a^2 + y\,\Sigma ab + z\,\Sigma ac = \Sigma af, \\ x\,\Sigma ab + y\,\Sigma b^2 + z\,\Sigma bc = \Sigma bf, \\ x\,\Sigma ac + y\,\Sigma bc + z\,\Sigma c^2 = \Sigma cf, \end{array}\right.$$

które, po zastosowaniu do równań (22), dla oznaczenia Δp, Δq i Δr, dają równania:

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta p \,.\, n + \Delta q \,.\, \Sigma h + \Delta r \,.\, \Sigma k = \Sigma m \\ \Delta p \,.\, \Sigma h + \Delta q \,.\, \Sigma h^2 + \Delta r \,.\, \Sigma hk = \Sigma hm \\ \Delta p \,.\, \Sigma k + \Delta q \,.\, \Sigma hk + \Delta r \,.\, \Sigma k^2 = \Sigma km. \end{array}\right.$$

Z tych równań można obrachować Δp, Δq i Δr, a dodawszy je do poprzednio obliczonych wartości na p, q, r — otrzymamy szukane, przy pomocy metody najmniejszych kwadratów obliczone, spółczynniki wyrażenia $w_x = p + q \,.\, r^x$, służącego do wyrównywania z obserwacyi oznaczonych prawdopodobieństw śmierci.

Lecz metoda najmniejszych kwadratów przedstawia pewne trudności teoretyczne i praktyczne, skutkiem czego p. Landré podaje sposób prostszy.

Weźmy pod uwagę tylko lata wieku od 20 do 80, t. j. liczbę lat podzielną przez 3.

Podstawmy w $w_x = p + qr^x$ otrzymane z obserwacyi prawdopodobieństwa śmierci, wtedy mieć będziemy 60 następujących równań:

$$\left\{\begin{array}{l} w_{20} = p + qr^{20}, \\ w_{21} = p + qr^{21}, \\ w_{22} = p + qr^{22}, \\ \text{i t. d.} \\ w_{79} = p + qr^{79}. \end{array}\right.$$

Te 60 równań podzielmy na trzy równe grupy i każdą grupę równań dodajmy do siebie oddzielnie; wówczas oznaczywszy dla krótkości:

$$w_{20} + w_{21} + w_{22} + \ldots + w_{39} = A,$$
$$w_{40} + w_{41} + w_{42} + \ldots + w_{59} = B,$$
$$w_{60} + w_{61} + w_{62} + \ldots + w_{79} = C,$$

do obliczenia p, q i r mieć będziemy trzy równania:

$$(24) \qquad \begin{cases} 20p + q \cdot \dfrac{r^{40} - r^{20}}{r-1} = A, \\ 20p + q \cdot \dfrac{r^{60} - r^{40}}{r-1} = B, \\ 20p + q \cdot \dfrac{r^{80} - r^{60}}{r-1} = C, \end{cases},$$

skąd:

$$(25) \qquad r^{20} = \frac{C - 20p}{B - 20p} = \frac{B - 20p}{A - 20p}.$$

Z ostatnich wyrażeń wypada

$$A \,.\, C - 20p \,.\, (A + C) = B^2 - 40p \,.\, B,$$

a stąd

$$(26) \qquad 20p = \frac{A \,.\, C - B^2}{A + C - 2B}.$$

Następnie

$$(27) \qquad r^{20} = \frac{C - B}{B - A}.$$

Znając p i r, można z któregokolwiek równania z (24) obrachować q; najlepiej jednak jest obliczyć je z sumy równań (24), t. j. z równania

$$(28) \qquad 60p + q \frac{r^{80} - r^{20}}{r-1} = A + B + C = \sum_{x=20}^{x=79} w_x.$$

Podstawiwszy tak oznaczone współczynniki p, q i r w wyrażenie

$$w_x = p + q \cdot r^x$$

i obliczywszy z niego w_x dla x od 20 do 80, mieć będziemy wyrównane prawdopodobieństwa śmierci.

Jakiejkolwiek użyjemy metody do wyrównania tablicy śmiertelności, zawsze na jej podstawie obrachowana liczba osób zmarłych nie będzie równa rzeczywistej. Gdy np. obserwowaną liczbę osób każdego wieku pomnożymy przez odpowiednie prawdopodobieństwa śmierci tablicy wyrównanej i otrzymane iloczyny dodamy do siebie, zawsze otrzymana suma nie będzie równa zaobserwowanej liczbie osób zmarłych.

Jeżeli jednak liczbę rzeczywiście zmarłych osób oznaczymy przez s, a z wyrównanej tablicy obliczoną przez $(1+a) \cdot s$, wtedy pomnożywszy wyrównane prawdopodobieństwa śmierci przez $\frac{s}{(1+a) \cdot s} = \frac{1}{1+a}$, otrzymamy wyrównane prawdopodobieństwa śmierci tak ustosunkowane, że na ogół dadzą one taką samą liczbę osób zmarłych, jaka rzeczywiście zaobserwowaną została.

O PEWNEJ KLASIE POWIERZCHNI JEDNOSTRONNYCH.

W artykule niniejszym zamierzamy opisać cynematyczny sposób tworzenia się pewnej klasy powierzchni prostoliniowych jednostronnych [1]).

Niech koło C (fig. 1) dowolnego promienia obraca się jednostajnie około osi KL, leżącej w jego płaszczyźnie. Jednocześnie niech śre-

[1]) Powierzchnię, ograniczoną lub nieograniczoną, nazywamy dwustronną, jeżeli możemy na niej wskazać dwa punkty takie, że dla przejścia od jednego z nich do drugiego niezbędne jest przejście przez granicę powierzchni lub przeniknięcie powierzchni nawskroś. Na takich powierzchniach potrafimy odróżnić strony wewnętrzną i zewnętrzną, lub dodatnią i ujemną