PIERWSZE ZASADY METAGEOMETRYI

CZYLI

GEOMETRYI OGÓLNEJ

napisał

P. Mansion.

[Dokończenie *)].

VIII.

Twierdzenia charakterystyczne geometryi riemannowskiej [1]).

XXXIII. Jeżeli dwie proste, przechodzące przez punkt A, mają drugi punkt [2]) przecięcia B, wtedy wszystkie inne proste na płaszczyznie dwóch pierwszych prostych, przechodzące przez punkt A, przechodzą także przez punkt B [3]).

---

*) Patrz Wiad. mat. Nr. 1. Str. 1—23

[1]) Prosimy usilnie czytelnika, aby nie czytał rozumowań poniższych, nadając milcząco wyrazowi „prosta“ to znaczenie, jakie on posiada w geometryi Euklidesa lub Łobaczewskiego. W paragrafie niniejszym, którego miejsce logiczne—wyłączając ostatnie twierdzenie—powinnoby być po paragrafie czwartym, wyrazy: prosta, płaszczyzna, koło, oznaczają utwory geometryczne, posiadające jedynie własności, wypowiedziane w definicyach 5-ej, 6-ej i 7-ej i w pierwszych czterech postulatach; nadto przez samą definicyę geometryi riemannowskiej odrzucamy postulat 6-ty i dlatego przyjmujemy, że istnieje przynajmniej jedna para prostych, mogących zamykać przestrzeń.

[2]) Punkt drugi jest wzięty w znaczeniu właściwem; przyjmujemy, że pomiędzy A i B niema punktu X, wspólnego prostym uważanym; gdyby bowiem tak było, punkt B byłby przynajmniej trzecim, nie zaś drugim punktem przecięcia tych prostych.

[3]) Gauss zauważył—i można to udowodnić sposobem elementarnym,—że w geometryi nieeuklidesowej nie istnieje dla figur płaskich podobieństwo bez równości. Nie ma tedy sposobu nakreślenia figury podobnej do figury nieeuklidesowej w skali mniejszej od rzeczywistości; można tylko wskazać jej rozkład ogólny. Z tego to powodu musimy punkt B naznaczyć na kierunku wszystkich prostych figury.

Niechaj będą (fig. 7) dwie proste Aa, Ad, spotykające się poraz drugi w punkcie B. Z punktu A, jako ze środka, promieniem Aa, mniejszym od AB, zakreślmy koło $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$, spotykające prostą Aa w punkcie a, prostą Ad w punkcie d. Przyjmujemy dla ustalenia myśli, że łuk ad stanowi $\frac{3}{7}$ okręgu. Można pomyśleć na okręgu punkt g, taki, że łuk dg równa się łukowi ad; powiadamy, że prosta Ag spotka prostą Ad w punkcie B. W samej

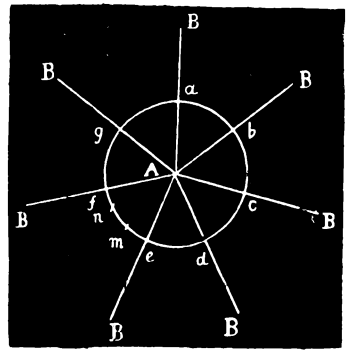

Fig. 7.

rzeczy, można przenieść figurę $AaBdA$, utworzoną przez dwie proste AaB, AdB w ten sposób, że pierwsza z tych prostych AaB zleje się z drugą AdB, ta zaś z prostą Ag. Ponieważ zaś proste AaB, AdB spotykają się w punkcie B, więc to samo będzie z temi prostemi w ich nowem położeniu AdB i Ag, co było do okazania.

Niechaj będzie jeszcze łuk $gc=dg$, $cf=gc$, $fb=cf$, $be=fb$. Proste Ag, Ac, Af, Ab, Ae spotkają się także z prostemi Ad i Aa w punkcie B. W ten sposób, siedm prostych, przechodzących przez punkt A i przez siedm punktów a, b, c, d, e, f, g (one te właśnie dzielą okrąg na części równe), spotkają się wszystkie w punkcie B. Dwie którekolwiek z nich nie mogą przeciąć się w punkcie, położonym przed punktem B; gdyby bowiem przecinały się w jakimś

punkcie X, zanim przetną się w punkcie B, to możnaby dowieść, że też samo miałoby miejsce i dla innych prostych, a więc dla prostych Aa i Ad, a stąd punkt B nie byłby drugim punktem przecięcia tych ostatnich.

Proste Am, An, przechodzące przez punkty podziału jednego z tych łuków, np. ef na trzy lub więcej części równych, przetną się także po raz drugi w punkcie B. Przyjmijmy na początek, że jedna z tych prostych Am spotyka prostą AeB w punkcie B; wtedy, jak wyżej, łatwo dowieść, że prosta An spotyka prostą Am w punkcie B, podobnież jąk dowiedziono, że Ag spotyka Ad w punkcie B. Gdyby prosta Am spotykała prostą AeB przed punktem B, np. w punkcie X, wtedy, jak wyżej, musiałyby proste An i Af spotykać proste Am i Ae w punkcie X; a zatem punkt B nie byłby punktem drugiego spotkania prostych Af i Ae [1]).

Proste tedy, przechodzące przez punkt A i przez punkty podziału okręgu na jakąkolwiek liczbę części równych, t. j. wszystkie wyobrażalne proste, wychodzące z punktu A, spotykają prostą Aa po raz drugi w punkcie B [2]).

Wniosek I. Dwie jakiekolwiek proste, przechodzące przez inny punkt C płaszczyzny, przecinają się w drugim punkcie D, położonym w tej samej odległości od punktu C, w jakiej znajduje się punkt A od punktu B. Albowiem można przesunąć na płaszczyźnie te proste w ten sposób, aby punkt C zlał się z punktem A, aby same te proste zlały się z dwiema prostemi,

---

[1]) Zauważyć należy, że prosta Am, nieograniczenie przedłużona, powinna spotykać prostą AeB lub AfB, lub obie te proste razem, w punkcie B: Gdyby bowiem było inaczej, to moglibyśmy wziąć na Am długość Amp większą od AeB, np równą $AeBq$, gdzie q jest po za punktem B na linii AeB. Okrąg, zakreślony ze środka A promieniem Aq, miałby punkt q zewnątrz i punkt p wewnątrz przestrzeni $AeBfA$, zamkniętej prostemi AeB, AfB, i spotykałby przynajmniej jednę z prostych w pewnym punkcie Y. Odległość AY, mniejsza od AB (lub równa AB), byłaby równa promieniowi Aq. większemu od AP, co jest niedorzecznem.

[2]) Można uważać, — jeżeli chcemy, — łuki niespółmierne z okręgiem; lecz przypadek ten zgodnie ze znaczeniem symbolicznem wyrazu „niaspółmierny“, sprowadza się do przypadku rozważanego w tekście.

przechodzącemi przez punkt A i spotkały się po raz drugi w punkcie D. Odległość AB lub CD oznaczać będziemy przez 2Δ.

Wniosek II. Prosta aA, przedłużona po za punkt A wzdłuż Aa', kończy się w punkcie B, gdzie spotyka proste AdB, AcB.

Określenie. Dwa punkty takie, jak A i B, odległe na 2Δ, nazywają się przeciwległemi.

Wniosek III. Punktowi A' prostej Aa (fig. 8) odpowiada punkt przeciwległy B', położony na przedłużeniu prostej aB; prosta $A'Aa'$, przedłużona, kończy się w punkcie B', a więc przedłużenie prostej aB po za punkt B ku B' zlewa się z prostą $Aa'B$. Stąd prosta riemannowska jest linią zamkniętą $AaBa'B$ o długości 4Δ, na której można posuwać się nieograniczenie jak na okręgu koła; odległość największa punktów na niej wynosi 2Δ.

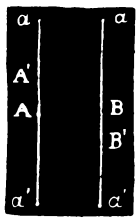

Fig. 8.

Wniosek IV. Płaszczyzna riemannowska, utworzona przez ogół prostych riemannowskich Aa, Ab i t. d., jest powierzchnią zamkniętą, podzieloną na dwa obszary przez każdą z tych prostych.

Wniosek V. Dwie jakiekolwiek proste riemannowskie m i n przecinają się w dwóch punktach przeciwległych. W rzeczy samej (fig. 9), przeprowadźmy prostą AC od punktu A pierwszej

Fig. 9.

prostej m do punktu C drugiej prostej n; prosta AC spotka pierwszą prostą w drugim punkcie B, przeciwległym punktowi A, drugą zaś prostą w drugim punkcie D, przeciwległym punktowi C. Prostą $ACBA$, na której znajdują się punkty C i D, punkt B dzieli na dwie części równe; punkt C znajduje się w części pierwszej, punkt D w części drugiej, ponieważ $CD = AB = 2\Delta$.

A zatem linia m otacza w zupełności punkt C, ponieważ łączy punkty A i B po prawej i po lewej stronie prostej ACB. Wynika stąd, że linia n, łącząca punkty C i D, znajdujące się też po prawej i po lewej stronie prostej ACB, spotyka linię n w dwóch punktach. Te punkty są przeciwległemi według wniosku 1-go.

Wniosek VI. W geometryi riemannowskiej postulat 5-y Euklidesa jest zawsze prawdziwy, albowiem proste, na jednej płaszczyźnie położone, zawsze się spotykają. W geometryi Łobaczewskiego postulat 6-ty Euklidesa jest zawsze prawdziwy; gdyby bowiem był nieprawdziwym w jednym tylko przypadku, to możnaby stąd wyprowadzić twierdzenie XXXIII, a z niego wniosek VI, który nie jest prawdziwym w geometryi Łobaczewskiego.

Uwaga. Dwadzieścia sześc twierdzeń § V są prawdziwemi w geometryi riemannowskiej; lecz w niektórych z nich należy wprowadzić ograniczenie, pochodzące stąd, że odległości uważane w danych tych twierdzeń, konstrukcye lub rozumowania nie powinny przekraczać granicy 2Δ, by dowodzenia i rozwiązania były bez zarzutu. Dla trójkątów najprościej przyjąć w definicyi, że boki ich są mniejsze od 2Δ. Znajdujemy dość łatwo, że konstrukcya, przyjęta w twierdzeniu I, pociąga za sobą to, iż bok mającego się wykreślić trójkąta równobocznego, jest mniejszy nietylko od 2Δ, lecz nawet od $\frac{4}{3}\Delta$. Podobne wszakże ograniczenie nie stosuje się do twierdzeń II i III, w których konstrukcye zawsze są wykonalne, i więcej niż raz jeden w razie potrzeby. W twierdzeniu XVI i w twierdzeniach do tegoż zależnych zakłada się w istocie rzeczy, że długości uważane są mniejsze od 2Δ. Lecz znaczna liczbą twierdzeń, wbrew pozorom, utrzymuje się we wszystkich przypadkach

Dla zwięzłości nie wymieniamy szczegółowo ograniczeń, jakie należy wprowadzić do twierdzeń § V-go; czytelnik, obznajmiony z geometryą euklidesową, pozna z łatwością, że własności figur prostokreślonych płaszczyzny riemannowskiej są analogicznemi do własności figur, utworzonych na powierzchni kuli przez łuki kół wielkich. Co się tyczy twierdzeń XXVII do XXXII, gdzie wyraźnie lub niewyraźnie zachodzą proste nieskończone, to oczywiście twier-

dzenia te mogą być dowiedzione tylko w geometryi Euklidesa lub Łobaczewskiego.

XXXIV. W trójkącie riemannowskim ABC suma trzech kątów trójkąta jest większa od dwóch kątów prostych (dowodzenie De Tilly'ego). Niechaj E będzie środkiem prostej CB (flg. 10); poprowadźmy prostą AE i przedłużmy ją o długość $EF = AE$; poprowadźmy też prostą FB. Trójkąt EFB będzie równy trójkątowi EAC. Przyjmijmy, że punkt F znajduje się wewnątrz trójkąta CBO, gdzie O jest punktem spotkania prostych ACQ i AB; t. j. punktem przeciwległym

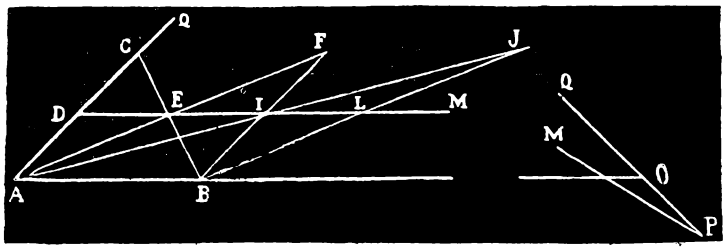

Fig. 10.

punktowi A. Niechaj I będzie środkiem prostej BF. Poprowadźmy prostą AI i przedłużmy ją tak, aby IJ było równe AI. Jeżeli punkt I znajduje się wewnątrz trójkąta BFO, to niechaj punkt L będzie środkiem prostej BI, $LN = AL$ (punkt N znajduje się po za granicami rysunku). Jeżeli punkt N jest jeszcze punktem wewnętrznym trójkąta BJO, to uskutecznijmy podobną konstrukcyę w trójkącie ABN i postępujmy w ten sposób dalej nieogranicznie.

Suma kątów w kolejnych trójkątach ABC, ABF, ABJ, ABN i t. d. jest zawsze jednakową, jak to łatwo widzieć. Rozumie się, że za kąt B w trójkątach ABF, ABJ, ABN . . . przyjmujemy sumy $ABE + EBF$, $ABI + IBJ$, $ABL + LBN$ i t. d.

Jeżeli jeden z tych kątów B, coraz bardziej rosnących, jest większy od dwóch prostych lub równy dwóm prostym, lub inaczej mówiąc, jeżeli jeden z punktów I, L i t. d., znajduje się zewnątrz

trójkąta BCO lub na linii BO, twierdzenie jest dowiedzionem, gdyż ten kąt B, razem z dwoma pozostałemi kątami trójkąta, daje sumę większą od dwu kątów prostych.

Otóż, jeden z punktów I, L i t. d. jest koniecznie zewnątrz trójkąta BCO. W rzeczy samej, niechaj punkt D będzie środkiem prostej AC; poprowadźmy proste DE, EI, IL i t. d. Trójkąt CDE równa się trójkątowi BEI, przeto kąt CED równa się kątowi IEB, $EI = DE$ i jest przedłużeniem prostej DE. W tenże sposób dowodzi się, że IL równa się prostej EI i jest tej przedłużeniem. Prosta $DEIL$ przecina prostą $ACQO$ w punkcie P, położonym po za punktem O w odległości $OP = AD$. Stąd jeżeli na prostej $DEIL$ odkładać będziemy nieograniczenie proste EI, IL i t. d., równe prostej DE, która jest mniejszą od DEP t. j. od 2Δ, to przynajmniej jeden z punktów I, L i t. d. znajdzie się już to na linii AB, już to zewnątrz trójkąta BCO. Twierdzenie więc nasze jest dowiedzionem.

W n i o s e k. W czworoboku riemannowskim suma kątów jest większa od czterech kątów prostych.

IX.

Streszczenie. Istota postulatów 5-go i 6-go.

Treść, podana w pięciu paragrafach poprzedzających, daje się streścić w sposób następujący.

W wykładzie systematycznym geometryi dochodzimy logicznie do postawienia dwóch dylematów.

D y l e m a t p i e r w s z y.

1. A l b o istnieje, co najmniej, jedna para prostych różnych, mających dwa punkty wspólne (g e o m e t r y a r i e m a n n o w s k a). W tym przypadku każda para prostych, mających punkt wspólny, ma jeszcze drugi punkt wspólny, nazwany przeciwległym pierwszemu; suma zaś kątów każdego trójkąta jest większa od dwu kątów prostych;

2. a l b o dwie proste różne nie mogą mieć nigdy dwóch punktów wspólnych (postulat 6-y; g e o m e t r y a n i e r i e m a-

nowska) i w tym przypadku suma kątów trójkąta nie jest nigdy większą od dwu kątów prostych (Twierdzenie pierwsze Legendre'a).

Dylemat drugi.

Jeżeli przyjmiemy drugą z powyższych hypotez, to:

1. albo dwie proste płaszczyzny, tworzące z poprzeczną kąty, których suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych, spotykają się (postulat 5-y; geometrya euklidesowa). Wtedy suma kątów każdego trójkąta jest równa dwóm kątom prostym; ten przypadek zachodzi, jeżeli suma kątów chociażby jednego trójkąta równa się dwóm kątom prostym (Twierdzenie drugie Legendre'a);

2. albo, istnieje przynajmniej jedna para prostych tej samej płaszczyzny, które się nie spotykają, a tworzą z poprzeczną kąty, których suma jest mniejsza od dwóch kątów prostych (geometrya Łobaczewskiego). W tym przypadku suma kątów każdego trójkąta jest mniejsza od dwóch kątów prostych.

Te same myśli można wyrazić jeszcze pod inną postacią, a mianowicie:

Definicya 5-a oraz postulaty 1-y, 2-gi i 4-y charakteryzują rodzaj: *prosta*.

Jeżeli dołączymy do tego tylko postulat 5-y, otrzymamy definicyę prostej riemannowskiej; jeżeli dołączymy tylko postulat 6-y, — definicyę prostej Łobaczewskiego; jeżeli wreszcie dołączymy postulaty 5-y i 6-y — będziemy mieli definicyę prostej euklidesowej.

Suma kątów w trójkącie riemannowskim jest większą od dwóch kątów prostych; jest mniejszą od dwóch kątów prostych w trójkącie Łobaczewskiego; równa dwóm kątom prostym w trójkącie euklidesowym.

Ponieważ własności płaszczyzny, lub ogólniej, własności przestrzeni, zależą co do swej istoty od własności prostej, przeto należy rozróżniać także płaszczyzny i przestrzenie riemannowskie, Łobaczewskiego i euklidesowe.

Własności wspólne trzem geometryom, są własnościami rodzajów: *prosta*, *płaszczyzna*, *przestrzeń*. W podręcznikach są one pomieszane bez odróżnienia z własnościami należącemi bądź

do jednej, bądź do dwóch gatunków, które powyżej określono.

W przedstawieniu poprzedniem nie uciekaliśmy się do żadnego z twierdzeń dowolnych, które Kant nazwał sądami syntetycznemi a priori, Postulaty 5-y i 6-y nie należą wcale do tej kategoryi twierdzeń. Są to poprostu definicye zapoznane, jak się trafnie wyraził p. Lechalas. Postulaty 5-y i 6-y są niezbędne do odróżnienia gatunków rodzaju *prosta* i nic nadto [1]). Nie są one ani zawarte w definicyi prostej ogólnej ani nie są z nią w sprzeczności. Są wprost od tej definicyi niezależnemi.

X.

Zarys głównych twierdzeń metageometryi. Niemożność udowodnienia postulatów.

Doszedłszy raz do twierdzenia podstawowego o sumie trzech kątów trójkąta w geometryi euklidesowej, Łobaczewskiego lub Riemanna, możemy już wyłożyć równoległe te trzy gałęzie metageometryi lub geometryi ogólnej, jak to uczynił De Tilly w swym sławnym zarysie z r. 1878.

---

[1]) Niechaj nam wolno będzie podać tu porównanie W algebrze badamy własności równań stopnia drugiego o spółczynnikach rzeczywistych: $ax^2+bx+c=o$. Równania te dzielą się na trzy klasy, według tego czy b^2-4ac jest ujemnem, dodatniem lub równem zeru. lub inaczej mówiąc, według tego, czy pierwiastki są urojone, równe albo też rzeczywiste i nierówne Pewne własności równań stopnia drugiego są wspólne wszystkim trzem klasom; inne należą tylko do jednej albo do dwóch z pomiędzy tych klas. Można powiedzieć, naśladując język geometryczny, że $b^2-4ac > o$ jest postulatem, charakteryzującym równanie o pierwiastkach rzeczywistych nierównych; $b^2-4ac=o$ postulatem, cechującym równania o pierwiastkach równych: wreszcie $b^2-4ac < o$ postulatem, cechującym równania o pierwiastkach urojonych. Lecz umysł dziwaczny, mało obeznany z teoryami algebraicznemi i nasiąknięty poglądami Kanta, mógłby powiedzieć: rozum ludzki jest tak utworzony, iż przyjmuje bez żadnego sprawdzenia, że dla każdego równania stopnia drugiego jest $b^2-4ac=o$; związek ten jest „sądem syntetycznym a priori“, którego nie możemy nie przyjąć, ani też ściśle uzasadnić

Metageometrya zawiera najprzód wiele twierdzeń wspólnych trzem geometryom. Za takie uważać można w „Geometryi“ Legendre'a, prócz 18 pierwszych twierdzeń w księdze I-ej, znaczną część twierdzeń w księgach II i IV, całą księgę VII oraz małą część księgi IV i VI

Przeciwnie, teorya równoległych, teorya podobieństwa, mierzenie długości, powierzchni i objętości, jak są wyłożone u Legendre'a, należą wyłącznie do geometryi euklidesowej, zarówno jak i związek podstawowy

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad . \; . \; . \quad (E)$$

pomiędzy przeciwprostokątną a i przeciwprostokątnemi b i c w trójkącie prostokątnym, oraz wszystko, co od tego związku zasadniczo zależy.

W geometryi Łobaczewskiego teoryę równoległych zastępuje twierdzenie Saccheri'ego i jego wyniki: dwie proste płaszczyzny albo spotykają się, albo są asymptotami jedna dla drugiej, albo wreszcie rozchodzą się nieograniczenie, poczynając od prostopadłej wspólnej. Teorya podobieństwa nie istnieje; lecz łatwo stwierdzić, że dwa trójkąty, mające kąty odpowiednio równe, są równe. Szukanie długości, powierzchni i objętości uskutecznia się inaczej niż w geometryi euklidesowej. Znajdujemy tu np., że powierzchnia trójkąta jest proporcyonalna do jego niedomiaru kątowego, t. j do różnicy pomiędzy dwoma kątami prostemi a sumą jego kątów (twierdzenie Lamberta); bez względu przeto na wielkość trójkąta powierzchnia jego jest zawsze mniejszą od pewnej granicy skończonej. Związek pomiędzy trzema prostokątną a bokami trójkąta jest

$$\cos h \frac{a}{l} = \cos h \frac{b}{l} \cos h \frac{c}{l} \quad . \; . \; . \quad (L)$$

gdzie l jest stałą, nazwaną stałą Łobaczewskiego [1]).

W geometryi riemannowskiej dwie proste płaszczyzny spotykają się zawsze w dwóch punktach przeciwległych; dwa trójkąty

[1]) cos h. sin h oznaczają dostawę i wstawę hyperboliczną.

o kątach równych są równe; teorya podobieństwa nie istnieje. Szukanie długości, powierzchni i objętości uskutecznia się prawie tak samo, jak w geometryi Łobaczewskiego. Powierzchnia trójkąta jest zawsze skończona i proporcyonalna do nadmiaru kątowego t. j. do różnicy pomiędzy sumą jego kątów a dwoma kątami prostemi Związek pomiędzy przeciwprostokątną, a przy prostokątnemi wyraża się w ten sposób

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} \quad . \; . \; . \quad (R)$$

gdzie r jest stałą, zwaną stałą riemannowską; tak, z $2\,\Delta = \pi r$ [1]).

Ze związków (E), (L), (R) wyprowadza się trygonometrye płaskie: euklidesową, Łobaczewskiego lub riemannowską. Różnią się one od siebie, lecz trygonometrya sferyczna jest jednakową we wszystkich systemach i identyczna z trygonometryą riemannowską płaską

Z każdego ze związków (E), (L), (R) wyprowadza się jeszcze odpowiedni związek pomiędzy dziesięcioma odległościami wzajemnemi pięciu punktów; nazwijmy te związki: (E'), (L'), (R'). Lagrange znalazł pierwszy z tych związków, Schering dwa pozostałe. De Tilly udowodnił, że związek (E') streszcza w sobie całkowicie geometryę euklidesową i że podobnie związki (L'), (R') streszczają w sobie dwie geometrye nieeuklidesowe. Można to samo przeto powiedzieć o związkach prostszych (E), (L), (R), ponieważ z nich dają się wyprowadzić związki (E'), (L'), (R') [2]).

---

[1]) Co do dowodu związku (L) patrz artykuł M. Gérarda w „Nouvelles Annales de mathématiques", 3-a ser. t. XII, str 74—84 (luty 1893): co do związku (R) nasze: „Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann" (Supplément à „Mathesis" 1895, 2-e série, t. V). Zresztą dzieła De Tilly'ego zawierają dowody wszystkich twierdzeń, o których mowa w tekście.

[2]) Z punktu widzenia analizy związki (R'), (L'), (E') dają się wyprowadzić z następującego związku pomiędzy odległościami $1x$, $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ jakiegokolwiek punktu x od punktów 1, 2, 3, 4, 5:

$$\alpha\cos\left(\frac{1\,x}{r}\right)+\beta\cos\left(\frac{2\,x}{r}\right)+\gamma\cos\left(\frac{3\,x}{r}\right)+\delta\cos\left(\frac{4\,x}{r}\right)+\varepsilon\cos\left(\frac{5\,x}{r}\right)=0,$$

gdzie α, β, γ, δ, ε są stałemi, od x niezależnemi. Znajdujemy (R'), gdy za x przyj-

Z punktu widzenia analizy matematycznej. związki (E), (L), (R) są przypadkami szczególnemi jednej równości. W rzeczy samej, związki (L) i (R) przekształcają się na związek (E), jeżeli uczynimy r lub l nieskończonem; związek (L) przechodzi na związek (R) i odwrotnie, jeżeli założymy $l = r\sqrt{-1}$. Podobnież związki (L') i (R') przechodzą na (E'), jeżeli uczynimy r lub l nieskończonem, wreszcie (L') staje się (R') i odwrotnie, jeżeli $l = r\sqrt{-1}$.

Trzy geometrye są, w gruncie rzeczy, rozwinięciem wyników ze związków (E) lub (E') (geometrya euklidesowa), (L) lub (L') (geometrya Łobaczewskiego), (R) lub (R') (geometrya riemannowska) Wszystkie trzy przeto są zarówno ścisłe i bez zarzutu pod względem budowy logicznej. W szczególności stosuje się to do geometryi euklidesowej. Lecz zanim sprowadzono do tego stopnia prostoty podstawy zasadnicze nauki o przestrzeni, nie umiano stwierdzić, że postulaty 5-y i 6-y geometryi euklidesowej mogą istnieć obok siebie, obok definicyj i innych postulatów. De Tilly to, sprowadzając wszystkie prawdy trzech geometryj do związków (E'), (L'), (R') pomiędzy odległościami pięciu punktów, oparł na niewzruszonej podstawie zasady nietylko dwu geometryj nieeuklidesowych lecz także i geometryi euklidesowej.

Uwagi poprzedzające o związkach analitycznych pomiędzy odległościami wierzchołków trójkąta prostokątnego lub też pomiędzy jakiemikolwiek pięcioma punktami pozwalają nam zrozumieć a posteriori, dlaczego na próżno przez dwa tysiące lat usiłowano udowodnić postulaty 5-y i 6-y W gruncie rzeczy w tych próbach bezowocnych, usiłowano udowodnić, że związki (E) lub (E') są równoważne związkom (L), (L') lub (R), (R'). Otóż jest to oczywiście niemożliwem: albowiem, aby wyprowadzić (E') z (L')

---

mujemy kolejno 1, 2, 3, 4, 5, a następnie rugujemy stałe z pięciu otrzymanych równań; znajdujemy (L') kładąc $r = l\sqrt{-1}$; znajdujemy wreszcie (E) jako przypadek graniczny, odpowiadający nieskończonym wartościom stałej r lub l Patrz nasz artykuł o tym przedmiocie w „Annales de la Societé scientifique de Bruxelles“ 1894—1895, t. XIX, 2-e partie pp. 189—196.

Zresztą nic łatwiejszego nad utworzenie geometryi analitycznej ogólnej o czterech lub więcej wymiarach, t. j. geometryi, którą charakteryzuje związek pomiędzy odległościami sześciu lub więcej punktów

lub (E) z (L), trzeba dołączyć do (L) lub (L') warunek dodatkowy, $l = \infty$; podobnież z (R) można otrzymać (E) lub z (R') otrzymać (E') tylko wtedy, gdy się założy $r = \infty$.

XI.

Geometrya fizyczna.

„Widzieliśmy, że gdy staniemy na stanowisku czysto-rozumowem, to wszystkie geometrye, ponieważ mogą być zbudowane bez prowadzenia do sprzeczności, mają jednakową wartość; jedne są tak samo prawdziwe jak drugie. Lecz można zapytać, do której z nich jest przystosowany nasz wszechświat Dla wielu odpowiedź na to pytanie nie jest wątpliwą; wszechświat nasz jest euklidesowym. Temu twierdzeniu bez zastrzeżeń trzeba niezbędnie przeciwstawić najprzód ograniczenie, któremu nie zaprzeczy nikt, kto szedł dotąd za biegiem myśli naszych Z chwilą, gdy szukany system geometryi nie ma żadnej cechy konieczności, możemy go poznać jedynie za pomocą metody obserwacyj; tylko przez pomiary dojść będziemy mogli do oznaczenia parametru naszego wszechświata; do przyjęcia, że wszechświat nasz jest identyczny z samym sobą, do czego a priori nic nas nie zmusza. Odtąd, oznaczenie to będzie mogło być uskutecznione tylko z pewnym stopniem przybliżenia, jak wszystkie oznaczenia doświadczalne (G. Lechalas, Etude sur l'espace et le temps Paryż. 1896, str. 88“) Dalej trzeba będzie przyjąć, że możemy być praktycznie pewni niezmienności wzorców miar naszych, gdy używamy ich w różnych miejscach, przy zachowaniu wszystkich innych tych samych okoliczności.

W tem założeniu, możnaby określić doświadczalnie, która z trzech geometryj idealnych odpowiada światu fizycznemu i znaleźć, gdyby szło o to, wartość stałych Riemanna lub Łobaczewskiego

W praktyce nitka wyprężona, bardzo delikatna, jest realizacyą możliwie dokładną ogólnego pojęcia prostej i pozwala nam stwierdzić, że krawędzie takiego clała stałego są prostemi, że

pewne powierzchnie są płaskiemi i t. d. Można więc zbudować narzędzia miernicze elementarne, np. liniały podzielone, za pomocą których można oceniać i porównywać odległości.

Można też kreślić figury geometryczne na płaszczyźnie, np. trójkąty prostokątne równoramienne. Przyjmijmy najprzód, że znaleziono dla podobnego trójkąta, że przeciwprostokątna równa się $\frac{4}{3}$ któregokolwiek z pozostałych boków. Wniesiemy stąd łatwo, że ta figura jest riemannowską, albowiem można oznaczyć wartość rzeczywistą $x = \frac{1}{4}\pi$, która sprawdza związek (R), napisany w przypadku obecnym pod postacią

$$\cos x \cos x = \cos \frac{4}{3} x,$$

gdzie x oznacza stosunek boku trójkąta do stałej riemannowskiej, gdy przeciwnie nie ma żadnej wartości na x, sprawdzającej związki (L) i (E), jak o tem można się przekonać. Stała riemannowska, będzie równa bokowi pomnożonemu przez $(4:\pi)$.

Przypuśćmy następnie, że znaleziono trójkąt prostokątny równoramienny, w którym stosunek przeciwprostokątnej do któregokolwiek z pozostałych boków równa się 2195 : 1469; wniesiemy stąd, że ta figura należy do systemu geometryi Łobaczewskiego, dlatego, że związek (L), napisany w postaci

$$\cos \mathrm{h}\, x \cos \mathrm{h}\, x = \cos \mathrm{h} \frac{2195}{1469} x,$$

gdzie x oznącza stosunek boku do stałej Łobaczewskiego, spełnia się prawie dla $x = \sqrt{2}$, gdy tymczasem żadna inna wartość rzeczywista nie spełnia związków (R) lub (E). Stała Łobaczewskiego jest prawie równa bokowi, pomnożonemu przez $\sqrt{2}$.

Po trzecie, jeżeli mamy trójkąt równoramienny, w którym stosunek przeciwprostokątnej do któregokolwiek z pozostałych boków równa się $\sqrt{2}$, wniesiemy stąd, że ta figura jest euklidesową, albowiem związek (E) jest jedynym związkiem, spełniającym się przy tem założeniu.

Lecz, prawdę mówiąc, ten ostatni przypadek nigdy miejsca mieć nie będzie, gdyż nie możemy ściśle wymierzyć dwu długości, których stosunek jest liczbą niewymierną $\sqrt{2}$. Wartość przybliżona pierwiastka kwadratowego z 2 jest 1, 41421 35623 73... W praktyce można znaleść na wartości stosunku przeciwprostokątnej do boku trójkąta prostokątnego równoramiennego wartości przybliżone $\sqrt{2}$, np. wartości przybliżone przez niedomiar

1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 i t. d.

lub przybliżone przez nadmiar:

1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422 i t. d.

W pierwszym razie znajdziemy, że trójkąt jest riemanowskim; w drugim, że jest trójkątem Łobaczewskiego [1]). Lecz bez względu na stopień dokładności pomiaru, nigdy nie znajdziemy ścisle $\sqrt{2}$ na szukany stosunek; nie można więc stwierdzić doświadczalnie, że trójkąt prostokątny równoramienny jest euklidesowym.

Ten wniosek stosuje się do każdej figury, złożonej z pewnej liczby punktów, których odległości mierzymy. Te odległości, znane tylko przybliżenie, mogą prawie sprawdzać związek (E); lecz można zawsze parametrom r i l, zachodzącym w związkach (R') i (L') nadać wartość względnie do mierzonych odległości, dostatecznie wielką tak, aby te parametry z równą dokładnością sprawdzały związki (R') i (L'). A zatem jest niemożebnem stwierdzić, że geometrya fizyczna jest euklidesową, nawet wtedy, gdy nią jest w rzeczy samej

W istocie, w części wszechświata, dostępnej wprost lub pośrednio pomiarom naszym, geometrya fizyczna jest przybliżenie euklidesową. Wszystkie mierzone odległości sprawdzają z bardzo

---

[1]) Dla okazania tego, uzasadniamy za pomocą analizy wyższej następujące twierdzenie: Trójkąt prostokątny równoramienny jest trójkątem riemannowskim, euklidesowym lub trójkątem Łobaczewskiego stosownie do tego, czy stosunek przeciwprostokątny do boku jest mniejszy od $\sqrt{2}$, równy $\sqrt{2}$ lub większy od $\sqrt{2}$.

wielkiem przybliżeniem związek (E') lub związki nieeuklidesowe (R') i (L'), które, praktycznie rzecz biorąc, nie różnią się od związku (E'). Wyobraźnia nasza jest też, jeżeli tak powiedzieć wolno, bardzo przybliżenie euklidesową. Lecz pewne złudzenia optyczne, które pomiary i rozumowanie łatwo prostuje, na pierwszy rzut oka zdają się być w zgodzie z geometryami nieeuklidesowemi: 1-o Długie aleje równoległe drzew dają nam obraz prostych asymptotycznych Łobaczewskiego. 2-o Gdy na sklepieniu niebieskiem śledzimy wzrokiem dwa kierunki, wychodzące z jednego punktu widnokręgu, dochodzimy do przeciwległego punktu widnokręgu, jak gdybyśmy postępowali według prostych riemannowskich [1]).

XII.

Metageometrya i kantyzm.

Euklides określił przed dwudziestu dwoma wiekami w swych „Elementach" pojęcia zasadnicze geometryi: punkt, prostą, płaszczyznę i t d. ze ścisłością wystarczającą na to, by można było oprzeć na nich dedukcyę logiczną części ogólnej nauki o przestrzeni. Nadto, w postulatach 5-ym i 6-y,m wyspecyalizował w istocie rzeczy definicyę prostej, aby można było udowodnić zasady specyalne tej części geometryi ogólnej, która nosi obecnie miano geometryi euklidesowej.

---

[1]) „Reid okazał, że gdyby człowiek został zredukowany do samego zmysłu wzroku, i gdyby poznawszy, że rozciągłość powierzchowniowa ma dwa wymiary, brał za linie proste to, co w samej rzeczy stanowi łuki kół wielkich nakreślonych na powierzchni kuli, której środek znajduje się w oku—wtedy trójkąty, uważane za prostokątne, mogłyby mieć dwa, a nawet trzy kąty proste lub rozwarte i geometrya takiego człowieka byłaby zupełnie różną od naszej. Dwie np. linie, które on poczytywałby za proste, przecinałyby się zawsze w dwu punktach, tak że pojęcie dwóch prostych równoległych byłoby dla niego pojęciem sprzecznem". Ampère „Essai sur la philosophie des sciences". Première partie (2-e éd. str. 64).

Łobaczewski, Riemann i ich następcy utworzyli dwie inne gałęzie geometryi ogólnej, geometryę Łobaczewskiego i geometryę Riemanna.

Trzy gałęzie metageometryi są naukami rozumowanemi, złożonemi z twierdzeń, których dowodzi się bez uciekania do doświadczenia, jedynie za pomocą analizy i porównywania pojęć zasadniczych. Te twierdzenia zatem są sądami analitycznemi, o ile nadajemy temu terminowi znaczenie tradycyjne: propositio per se nota, nie zaś znaczenie kantowskie sądów tożsamościowych lub jakoby tożsamościowych.

Z charakteru analitycznego twierdzeń geometrycznych wynika wartość apodyktyczna trzech gałęzi metageometryi i możliwość posługiwania się każdą z nich w dowodzeniach twierdzeń analizy czystej. Tak tedy za pomocą geometryi euklidesowej można było utworzyć trygonometryę ogólną, t. j. teoryę funkcyj: wstawa i dostawa, którą można też wyłożyć wprost bez pomocy geometryi. Teorya wstaw i dostaw mogła być następnie spożytkowana do badania geometryi Łobaczewskiego i Riemanna, tak, że pozornie, lecz tylko pozornie, te dwie geometrye opierać się zdają z konieczności na geometryi euklidesowej.

Geometrya fizyczna, przeciwnie, jest nauką obserwacyjną, w której posługujemy się geometryą rozumowaną, jako pomocniczą. Obserwacya ta pozwala wnioskować, że odległości fizyczne w przyrodzie sprawdzają bardzo przybliżenie związek (E) lub związki (L') i (R'), gdy w nich r i l są dostatecznie wielkie; inaczej mówiąc, obserwacya uczy nas, że geometrya fizyczna jest prawie geometryą euklidesową i o trzech wymiarach. Z punktu widzenia logicznego, to ostatnie twierdzenie jest więc sądem empirycznym, albo— jeżeli chcemy użyć innej terminologii — sądem syntetycznym a posteriori.

W pierwszem wydaniu swojej Krytyki czystego rozumu (1781), później w formie bardziej rozwiniętej w wydaniu drugiem (1787) Kant wypowiedział o geometryi poglądy, będące w zupełnem przeciwieństwie z powyższem.

Zauważono (Milhaud, „Kant comme savant“, w „Revue philosophique“ z maja 1895, str. 482—510), że Kant nie posiadał poważnych wiadomości naukowych. Dotykał on wielu pytań,

lecz raczej jako filozof niż uczony, będąc na sposób starożytnych, zaprzątnięty głównie myślą o zapewnieniu wiedzy podstaw a priori. Po Newtonie, po uczonych XVIII-go stulecia, Kant wydaje się nie należącym do swego czasu. Jego poglądy, nieraz genialne, mają charakter zbyt nieokreślony. Czujemy, że nie tworzą się one ani w zetknięciu z faktami, ani nawet w zetknięciu z wiedzą matematyczną ówczesną. Są one przeniknione naiwnością, mimo pozory formy uczonej, i przypominają raczej pewne teorye Arystotelesa lub nawet jończyków, niż Eulera lub Newtona" (str. 102—103).

Lecz Kant nauczył się i uczył matematyki elementarnej i był uderzony charakterem powszechności i konieczności jej twierdzeń. Z jednej strony miał głębokie przekonanie o pewności apodyktycznej tych twierdzeń; z drugiej zaś nie widział możności sprowadzenia ich do sądów analitycznych, co wynikło z powodu zbyt ciasnego pojmowania przezeń tych ostatnich. To przekonanie i ta niemożność doprowadziły go do utworzenia z matematyki (i później z metafizyki) nauki bezwzględnie subjektywnej. Twierdzenia zasadnicze matematyki, a zwłaszcza geometryi, z założenia pozbawione sprawdzenia we właściwem znaczeniu tego wyrazu, lecz takie zarazem, że umysł przystaje do nich z koniecznością, nazywa Kant sądami syntetycznemi a priori, dla odróżnienia ich od sądów syntetycznych a posteriori, lub twierdzeń empirycznych, w których atrybut wyraża pewną własność niekonieczną podmiotu [1]). Przestrzeń dla Kanta jest wyobrażeniem

[1]) Kant przytacza wyraźnie niewielką tylko liczbę rzekomych sądów syntetycznych a priori, odnoszących się do geometryi W trójkącie bok jeden jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych, przestrzeń ma tylko trzy wymiary; dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni i t. d. Pierwsze z tych twierdzeń jest w rzeczywistości należącym do geometryi rozumowej sądem analitycznym, którego dowód naszkicowaliśmy w § V według Euklidesa. Twierdzenie drugie należy do geometryi fizycznej, jest sądem syntetycznym a posteriori. Twierdzenie trzecie jest postulatem 6-ym Euklidesa, równoważnym definicyi, jak to wykazaliśmy w § IX. O tym postulacie 6-ym Kant mówi najprzód ze ścisłością geometry riemannowskiego: „So ist indem Begriffe einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist, kein Wiederspruch" (Transc. Anal. II, 3, Nr. 4), lecz następnie system pociąga

koniecznem a priori, służącem za podstawę wszelkiej poglądowości zewnętrznej i będącem przyczyną pewności apodyktycznej wszystkich zasad geometrycznych.

Metageometrya jest w radykalnej sprzeczności z tem pojęciem przestrzeni, jako wyobrażeniem koniecznem a priori. W rzeczy samej, metageometrya pociąga za sobą możliwość nieograniczonej liczby różnych geometryj; najprzód geometryi euklidesowej, następnie wszystkich odmian geometryj nieeuklidesowych, odpowiadających wszelkim pomyśleć się dającym wartościom parametrów r i l. W jakiż sposób pogląd kantowski na przestrzeń mógłby dawać umysłowi wszystkie te różne geometrye, jako wyobrażenie konieczne a priori? Jest to oczywiście niemożliwem. Metageometrya jest niemniej w przeciwieństwie z poglądami Kanta, na przestrzeń około r. 1769, gdy wraz z różnymi filozofami przyjmował, że przestrzeń jest rzeczywistością zewnętrzną, istniejącą niezależnie od przedmiotów. W takim systemie podobnie jak w tym, w którym geometrya byłaby nauką zupełnie empiryczną, istnienie trzech systemów geometryi rozumowej jest równie niezrozumiałem, jak w systemie „Krytyki czystego rozumu".

Nakoniec, metageometrya pozwala nam odpowiedzieć za pomocą argumentu ad hominem na pierwszą antynomię rozumu czystego: Świat jest równocześnie skończonym i nieskończonym w przestrzeni. Gdyby nawet rozumowanie Kanta było ścisłem; gdyby sprzeczność, którą zaznacza, nie pochodziła jedynie z pomieszania przestrzeni rzeczywistej i przestrzeni idealnej, to dla usunięcia wszelkich trudności wystarczyłaby uwaga, że w wykładzie Kanta tkwi w ukryciu przyjęcie, iż świat jest euklidesowym. Otóż, gdyby był riemannowskim, antynomia

---

go do wyrzeczenia twierdzenia wprost przeciwnego. W fizyce cytuje Kant jako sądy syntetyczne a priori: prawo stałości masy i prawo równości działania i przeciwdziałania; wątpimy, by rozumiał on ścisłe znaczenie tych dwóch zasad, które są sądami syntetycznemi a posteriori. Sądzimy, że wszystkie sądy syntetyczne a priori Kanta należą do jednej z następujących kategoryj: są albo postulatami, t. j. „przebranemi" definicyami: albo sądami analitycznemi, których nie umiał zanalizować: albo wreszcie sądami syntetycznemi a posteriori, których natury empirycznej nie poznał.

nie miałaby sensu; zasadniczo i faktycznie świat byłby skończonym.

Gdy się zastanowimy nad ciągiem myśli, które doprowadziły Kanta do jego systemu, dojdziemy do wniosku, który wyraził był p. Milhaud w wyżej wzmiankowanym artykule: „Punktem wyjścia „Krytyki czystego rozumu“ jest całkiem naiwne stwierdzenie charakteru konieczności i powszechności sądów matematycznych“ (str. 109). Subjektywizm metafizyczny Kanta, zdaje się, wyszedł z jego subjektywizmu matematycznego; na czele „Krytyki czystego rozumu“ postawiono, że tu użyjemy szczęśliwego wyrażenia p. Lechalasa, pewien gatunek imperatywu geometrycznego.

Metageometrya, wykazująca czczość poglądów Kanta na przestrzeń, zburzyła tedy metafizykę krytycyzmu, jak o tem wyraziliśmy się we Wstępie [1]).

DODATEK.

Geometrya, jako fizyka matematyczna odległości.

Leibniz określił linię prostą w sposób następujący: Prosta jest miejscem punktów nieruchomych ciała, które porusza się tak, że dwa jego punkty pozostają stałemi [2]).

---

[1]) „Hat nun Helmholtz Recht und ist das Kantische Fundament falsch, so fällt damit auch der Inhalt und die Methode, welche hieraus nothwendig hervorgewachsen: dann ist ferner die jahrhundertlange Richtung der deutschen Philosophie eine verfehlte“. (A. Krause, „Kant und Helmholtz über den Ursprung und die Bedeutung der Raumanschanung und der geometrischen Axiome“, Lahr 1878, Vorvort), Helmholtz jest tu cytowany, jako przedstawiciel poglądu o empirycznem źródle postulatów.

[2]) „Sit corpus aliquod, cujus duo puncta sint immota et fixa, ipsum autem corpus nihilominus moveatur, tunc omnia puncta corporis quiescientia incident in rectam quae per duo puncta fixa transit“. (Dzieła matematyczne Leibniza, wyd. Gerhardta, V, str. 137. porów. Cantor Gesch. d. Math. III, str. 32 .

Ta definicya prostej może być, bez zmiany istotnej, daną w postaci dogodniejszej, jeżeli wprowadzimy pojęcie odległości lub przedziału pomiędzy dwoma punktami, rozumiejąc przez to liczbę, charakteryzującą tę parę punktów. Początek doświadczalny tego pojęcia odległości znają wszyscy: pewne ciała stałe wydają się nam niezmiennemi i mówimy, że dwa ich punkty są w takiej a takiej odległości, jeżeli możemy umieścić pomiędzy temi punktami uważany również za niezmienny liniał z podziałką lub części liniału, najmniejszą liczbę razy; ta liczba jest miarą odległości lub wprost odległością dwu punktow.

To założywszy i uważając pojęcie odległości za pojęcie pierwotne, Cauchy określił prostą w sposób następujący: Prosta AB jest taką linią, że każdy z jej punktów jest w takiej odległości od punktu A i od punktu B, w jakiej nie jest żaden z punktów przestrzeni. Każdy punkt H zewnątrz prostej, przeciwnie jest takim punktem, że istnieje przynajmniej jeden punkt K, tak samo odległy od punktów A i B, jak jest odległym punkt H.

Ta definicya jest równoważną definicyi Leibniza: w samej rzeczy, jeżeli obracamy ciało, zawierające równocześnie punkty A, B, M, H około punktów A i B, przyjętych za stałe, to jest jasnem, że gdy punkt M znajduje się na prostej AB, to on pozostaje nieruchomym na zasadzie definicyi, gdy tymczasem punkt H może przyjąć inne położenie K

Definicya prostej, podana przez Cauchy'ego, jakkolwiek w istocie rzeczy identyczna z definicyą Leibniza, ma nad tą ostatnią tę wyższość, że prowadzi do analogicznego określenia płaszczyzny. U Cauchy'ego płaszczyzną ABC jest powierzchnia taka, że każdy z jej punktów jest w takiej odległości od trzech punktów, o których zakładamy, że nie leżą na jednej prostej, w jakiej nie znajduje się żaden inny punkt przestrzeni. Każdy punkt H zewnątrz płaszczyzny jest przeciwnie takim punktem, że istnieje przynajmniej jeden punkt inny K, tak samo odległy od punktów A, B, C, jak punkt H.

Uważajmy trzy punkty A, B, M, położone na prostej, oraz punkt H zewnętrzny. Jeżeli, założywszy, że A i B są stałemi,

będziemy ciało, do którego należą punkty A, B, M, H, obracali w ten sposób, aby punkt H sprowadzić do położenia punktu K, wtedy punkt M, według definicyi Leibniza, pozostanie nieruchomym. Można przeto powiedzieć, że ciało obraca się około prostej AM lub BM, zamiast powiedzieć, że obraca się około AB; inaczej mówiąc, prosta AB jest identyczna z prostą AM lub z prostą BM, jeżeli punkt M znajduje się na AB.

Można wyrazić to samo, wprowadzając do poprzedzających rozważań pojęcie odległości t. j. posługując się definicyą Cauchy'ego, a to sposobem następującym. Przyjmijmy, że dla każdego punktu X dwie z odległości XA, XB, XM od punktów A, B, M prostej określają trzecią odległość (twierdzenie A) Jeżeli X jest punktem H zewnętrznym względem prostej AB, to istnieć będzie punkt K taki, że $KA=HA$, $KB=HB$, przeto będzie $KM=HM$. Lecz związki $KA=HA$, $KM=HM$ wyrażają, że H i K są punktami zewnętrznemi względem prostej AM; podobnież $KB=HB$, $KM=HM$ wyrażają, że H i K są zewnątrz prostej BM. Każdy zatem punkt zewnętrzny względem AB jest zewnętrzny względem AM i względem BM; ponieważ i odwrotne twierdzenie jest prawdziwem, przeto prosta AB jest identyczna z prostą AM i z prostą BM

Powyższe rozważania można zastosować i do płaszczyzny. Niechaj będzie płaszczyzna, określona przez trzy punkty A, B, C; niechaj M będzie czwartym punktem tej płaszczyzny. Przyjmijmy, że dla każdego punktu X trzy z pomiędzy odległości XA, XB, XC, XM określają czwartą (twierdzenie B). Jeżeli X jest punktem H zewnętrznym względem płaszczyzny ABC, to istnieć będzie, według definicyi płaszczyzny, podanej przez Cauchy'ego taki punkt K, że będzie $KA=HA$, $KB=HB$, $KC=HC$, a zatem będzie $KM=HM$. Ostatni związek wraz z dwoma z poprzedzających wyraża, że H i K są punktami zewnętrznemi względem płaszczyzny ABM, lub względem płaszczyzny BCM, lub wreszcie względem płaszczyzny CAM. Ponieważ i odwrotne twierdzenie jest prawdziwem, przeto płaszczyzny ABC, ABM, BCM, CAM są identycznemi.

Możemy teraz dowieść następującego twierdzenia: Prosta MN całkowicie jest zawartą w płaszczyźnie ABC, któ-

re zawiera jej dwa punkty M i N (twierdzenie C). W rzeczy samej, według powyższego, płaszczyzna ABC jest identyczna z płaszczyzną ABM, która jest znów identyczna z płaszczyzną AMN. Niechaj H będzie punktem zewnętrznym względem płaszczyzny ABC lub AMN. Według definicyi Cauchy'ego, istnieć tedy będzie drugi punkt K tak, że będzie $KA=HA$, $KM=HM$, $KN=HN$ Otóż, dwie ostatnie równości wyrażają, że punkty K i H są zewnętrznemi względem prostej MN. Ponieważ więc każdy punkt zewnątrz płaszczyzny ABC będzie zewnętrznym względem prostej MN, przeto prosta ta nie może mieć żadnego ze swych punktów zewnątrz płaszczyzny, a więc cała zawartą jest w płaszczyźnie [1]).

Twierdzenie C jest przeto wynikiem twierdzeń A i B. Jaka jest istota tych twierdzeń? Czy są one wynikiem definicyi prostej i płaszczyzny, podanych przez Cauchy'ego; czy są postulatami, które należy dołączyć do powyższych definicyi, dla scharakteryzowania zupełnego prostej i płaszczyzny; czy są wreszcie twierdzeniami niezgodnemi z powyższemi dwiema definicyami?

Można dać taką częściową odpowiedź na te pytania. Jeżeli przyjmiemy twierdzenie C lub twierdzenia A i B, z których ono wypływa, to znajdziemy, jak o tem była mowa w § X, w każdym z trzech systemów geometryi związek pomiędzy dziesięcioma odległościami pięciu jakichkolwiek punktów. Można podobnież otrzymać związek pomiędzy sześcioma odległościami, czterech punktów płaszczyzny oraz związek pomiędzy trzema odległościami trzech punktów prostej.

Odwrotnie, ze związków tych, nie przedstawiających nic w sobie sprzecznego, można łatwo za pomocą analizy wyprowa-

---

[1]) Definicye Euklidesa, dane dla prostej i płaszczyzny, są, jak sądzimy, streszczeniem rozważań, podobnych do powyższych; przynajmniej definicyę te, tak ciemne na pierwsze wejrzenie. nadają się do interpretacyi literalnej, zgodnej z powyższem. Gauss w r. 1829 w liście z d. 27 Stycznia do Bessela słusznie krytykuje definicyę płaszczyzny, podaną przez Legendre'a: „Definicya płaszczyzny, powiada, jako płaszczyzny, zawierającej wszelką prostą, która łączy dwa jej punkty, zawiera więcej warunków, niż potrzeba do jej wyznaczenia. Definicya ta mieści w sobie twierdzenie, które powinno być pierwiej uzasadnionem.

dzić czy to twierdzenie C, czy to twierdzenia A i B; te więc rożne twierdzenia zgadzają się jedne z drugiemi, trzecia przeto z powyżej trzech uczynionych hypotez powinna być odrzucona. Inaczej mówiąc twierdzenia A i B są albo wynikami definicyi Cauchy'ego albo są jej dopełnieniem. Nie można zresztą rozstrzygnąć tym sposobem, który z dwu ostatnich przypadków zachodzi.

Lecz można pójść jeszcze dalej. Skoro tylko doszliśmy, jak wyżej do posługiwania się związkami, charakteryzującemi odpowiodnio przestrzeń o trzech wymiarach, płaszczyznę lub przestrzeń o dwu wymiarach i prostą lub przestrzeń o jednym wymiarze, to musimy już logicznie przyjąć całkowicie sposób przedstawienia rzeczy, podany przez De Tilly'ego i uważać geometryę za fizykę matematyczną odległości. W tym sposobie przedstawienia, odległość dwu punktów określona tak, jak to wyżej uczyniono, staje się jedynem pojęciem nieprzywiedlnem geometryi Wyprowadzamy z niego pojęcie figur równych, tak trudne do ustalenia w inny sposób; następnie za pośrednictwem związków, charakteryzujących prostą, płaszczyznę i przestrzeń o trzech wymiarach, dajemy definicye długości pól i objętości; wreszcie, bez uciekania się do jakiegokolwiek postnlatu, wyprowadzamy całą geometryę pod trzema różnemi postaciami, t. j. geometryę Euklidesa, Łobaczewskiego i Riemanna.

Wykład elementarny geometryi ogólnej, naszkicowany przez nas w §§ III—X podług Euklidesa, Łobaczewskiego, Riemanna i ich następców, prowadzi do związków charakterystycznych pomiędzy odległościami trzech punktów prostej, czterech punktów płaszczyzny, pięciu punktów przestrzeni o trzech wymiarach Odwrotnie, wykład analityczny De Tilly'ego, oparty na pojęciu odległości i na związkach, o których mowa, pozwala znaleść wszystkie rezultaty wykładu elementarnego i stwierdza, że definicye, postulaty i pewniki, które są podstawą tego wykładu elementarnego są zgodne jedne z drugiemi. Wykład eiementarny i wykład analityczny, razem wzięte, stanowią tedy system zupełny geometryi ogólnej, który z punktu widzenia ścisłości, bezwzględnie jest bez zarzutu.