dzieł Jacobi'ego, a następnie, przy pomocy oddanych sobie uczniów doglądał wydawnictwa własnych dzieł zbiorowych, którego końca nie było mu danem doczekać się. Wychował wielu znakomitych uczniów, pomiędzy którymi wymieniamy profesora H. A. Schwarza, Z. Kowalewską i t. p.

Zgon Weierstrassa odezwał się echem żałobnem we wszystkich ogniskach nauki matematycznej. Znakomity matematyk francuski, sędziwy Karol Hermite, wygłaszając na posiedzeniu Akademii paryskiej w dniu 1 marca 1897 mowę, poświęconą pamięci zgasłego badacza, streścił jego odkrycia i wyrażając podziw dla geniuszu, zakończył przemówienie słowami, „że pamięć Weierstrassa żyć będzie tak długo, dopóki umysły żądne prawdy poświęcać będą swe wysiłki badaniom analizy i postępom nauki rachunku". Jest to świadectwo nieśmiertelności, wystawione przez głębokiego myśliciela i znawcę.

S. Dickstein.

O MIERZENIU WIELKOŚCI I O POJĘCIACH Z NIEM ZWIĄZANYCH.

Napisał

S. Zaremba.

I.

Słowo wstępne.

O ile w teoryi czystej nie istnieje żadna trudność w kwestyi mierzenia wielkości, o tyle rozchodzą się poglądy, gdy idzie o przedstawienie tego przedmiotu w nauczaniu. Powszechnem jest zdanie, że wykład istotnie naukowy tego pytania przekracza pojęcie uczniów. Stąd to pochodzi bardzo rozpowszechnione, niestety, w nauczaniu dążenie do ukrywania raczej, niż do rozwiązywania trudności, tkwiących w przedmiocie; stąd to pojęcia, odnoszące się do mierzenia wielkości i będące podstawą najbardziej elementarnych zastosowań rachunku, są ciemnemi prawie dla wszystkich, z wyjątkiem osób, które uprawiały matematykę po wyjściu ze szkoły. Sądzimy przeto, że jest rzeczą bardzo ważną zapełnienie zaznaczonego braku w nauczaniu matematyki. Nie sądzimy, abyśmy zupełnie doszli do tego celu; mamy wszakże nadzieję, że praca niniejsza, która jest próbą w tym kierunku, nie będzie pozbawiona interesu dla osób, które obchodzi wykład matematyki.

II.

Postawienie kwestyi.

Mierzyć wielkość jest to określać ją niedwuznacznie za pośrednictwem innej wielkości tego samego gatunku, nazwanej jednostką.

Ponieważ typem wielkości jest długość, będziemy przeto mówili w poniższym wykładzie tak, jakby rzecz dotyczyła jedynie mierzenia długości. Okaże się następnie zupełnie widocznem, że teorya, którą wykładamy, stosuje się bez żadnej zmiany do wszystkich wielkości, rozważanych w geometryi i mechanice.

Niechaj u będzie jednostką długości, a zaś długością, którą mamy wymierzyć. Mogą tu zajść dwa przypadki.

1-o. Długości a i u są spółmierne, t. j. istnieje długość d, nazwana ich miarą wspólną, która jest częścią wielokrotną każdej z długości a i u.

2-o. Długości a i u są niespółmierne.

III.

Liczby ułamkowe.

1. Oznaczamy znowu przez u jednostkę, przez a długość spółmierną z u i mającą być wymierzoną.

Niechaj p i m będą liczby, wyrażające ile razy miara wspólna d zawiera się odpowiednio w długościach u i a. Jest jasnem, że ponieważ jednostka długości jest znaną, to będzie można określić a niedwuznacznie, gdy znanemi są liczby całkowite p i m. Sposób ogólnie przyjęty przedstawiania tych danych polega na umowach następujących:

1-o. Nazywamy liczbą ułamkową symbol, utworzony przez dwie liczby całkowite, napisane jedna nad, druga—pod kreską poziomą. Pierwsza z nich nazywa się licznikiem, druga mianownikiem liczby ułamkowej.

2-o. Mówimy, że długość a mierzy się w jednostkach u przez liczbę ułamkową $\frac{m}{p}$, gdy a i u mają miarę wspólną, która zawiera się m razy w długości a, p razy w długości u.

Według powyższego—po wyborze jednostki długości—każdej liczbie ułamkowej, której oba wyrazy nie są jednocześnie zerami, odpowiada długość, mierzona przez tę liczbę. Z drugiej strony, ponieważ dwie długości, gdy są spółmiernemi, mają nieskończenie wiele miar wspólnych, przeto każdej długości spółmiernej z jednostką odpowiada nieskończenie wiele mierzących ją liczb ułamkowych. Stąd umowa następująca:

Mówimy, że dwie liczby ułamkowe są równe, gdy przy tej samej jednostce mierzą tę samą długość.

W umowie tej tkwi myśl, że gdy dwie liczby ułamkowe mierzą jednę długość przy jednostce u, to mierzą zawsze długości wzajemnie równe przy każdej innej jednostce u. Wynika to bezpośrednio z następującego twierdzenia:

Aby dwie liczby ułamkowe $\frac{m}{p}$ i $\frac{m'}{p'}$ były równe, trzeba i wystarcza, by było:

$$p\,m' - p'\,m = 0.$$

Dowodzimy łatwo tego twierdzenia, spotrzegając, że $p\,p'$ — a część jedności zawiera się $m\,p'$ razy w długości, mierzonej przez liczbę $\frac{m}{p}$, zaś $m'\,p$ razy w długości, mierzonej przez liczbę $\frac{m'}{p'}$.

Wszystko, co odnosi się do skracania i do sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika, wynika już bezpośrednio z powyższego.

Nie może być dalej żadnej wątpliwości co do sposobu, w jaki rozumieć należy nierówność dwu liczb ułamkowych; większą z dwóch liczb ułamkowych będzie ta, która — przy określonej jednostce długości — mierzy długość większą.

2. Teorya działań, proponowana przez nas, charakteryzuje się dwoma następującemi określeniami:

1-o. Nazywamy sumą dwóch liczb ułamkowych α i β liczbę ułamkową, która mierzy długość, otrzymaną po przystawieniu do siebie dwu długości, mierzonych przez liczby α i β. Na tej podstawie dojdziemy do zwykłego prawidła i uwidocznimy tym sposobem te dwie okoliczności: że istnieje zawsze liczba ułamkowa, będąca sumą dwu liczb ułamkowych danych, i że wynik działania nie zależy od jednostki długości.

2-o. Dla określenia iloczynu liczby ułamkowej $\frac{m}{p}$, nazwaną mnożną, przez liczbę ułamkową $\frac{m'}{p'}$, nazwaną mnożnikiem, rozważmy długość u mierzoną przez liczbę $\frac{m}{p}$, przy przyjęciu za jednostkę pewnej długości u', i niechaj a będzie długością mierzoną, przez liczbę ułamkową $\frac{m'}{p'}$, przy przyjęciu za jednostkę długości u. Iloczyn szukany będzie, według określenia liczbą, która mierzy długość a, przy przyjęciu za jednostkę długości u'. I tu dojdziemy łatwo do zwykłego prawidła i uwidocznimy fakt, że iloczyn istnieje, że zależy jedynie od dwu czynników i zupełnie nie zależy od wyboru długości u'.

3. Dowiedziemy łatwo, że gdy, zgodnie ze zwyczajem, uważać będziemy liczby ułamkowe z mianownikiem jedność za równe ich licznikom, to nie będziemy w żadnej sprzeczności z teoryą działań na tych liczbach; potrzeba będzie tylko dla zupełnej harmonii rozciągnąć do liczb ułamkowych umowy, określone równościami:

$$a + 0 = a\,; \quad 0 \times a = 0.$$

Dopiero po wyjaśnieniu, w jaki sposób uważać można liczby całkowite za liczby ułamkowe szczególnego rodzaju, mamy w istocie prawo mówić o wyciąganiu całości z liczb ułamkowych.

III.

Liczby niewymierne.

1. Niechaj będzie dana do wymierzenia długość a, niespółmierna z jednostką u. Lecz czy dwie długości mogą być niespółmiernemi? Usuniemy wszelką co do tego wątpliwość za pomocą klasycznego przykładu przeciwprostokątnej i boku w trójkącie prostokątnym równoramiennym. Po tem zwrócimy uwagę na to, że liczba wymierna; wzięta zupełnie dowolnie, ponieważ nie może mierzyć długości równej a, mierzyć będzie albo długość mniejszą od długości danej a, albo długość większą niż a. Umówimy się, by mówić, że w pierwszym przypadku liczba wymierna należy do kategoryi A, w drugim zaś do kategoryi B. Nie natrafimy na żadną trudność w uzasadnieniu, że każdy zbiór danych, pozwalający rozstrzygnąć, do której z dwu kategoryj A lub B należy liczba ułamkowa dana dowolnie, będzie wystarczający do określenia niewątpliwego długości a za pomocą jednostki u. Jeżeli zgęścimy ten ogół danych w jednym symbolu φ i jeżeli zgodzimy się nazwać taki symbol liczbą niewymierną, będzie można powiedzieć, że liczba niewymierna φ mierzy długość a. Według tego, liczba niewymierna występuje jako symbol, określający pewien rozdział ogółu liczb wymiernych na dwie kategorye [1]). Jest koniecznem znalezienie cech charakterystycznych tego rozdziału liczb wymiernych na dwie kategorye. Znajdujemy bez trudu, że musi stać się zadość następującym warunkom:

1. Każda liczba tej z dwóch kategoryj, którą nazwaliśmy A, powinna być większą od każdej z liczb drugiej kategoryi B.

---

[1]) Teoryę tę zawdzięczamy Dedekindowi („Stetigkeit und irrationale Zahlen“) 1872.: (Przyp. Red.).

2. W kategoryi A żadna liczba nie powinna być większą od żadnej z liczb, po za nią będących.

3. W kategoryi B żadna liczba nie powinna być mniejszą od żadnej z liczb pozostałych.

Warunki te są wystarczającemi; innemi słowy, gdy one się spełnią, bo istnieć będzie zawsze długość jedyna a, niespółmierna z jednością, mająca dwie następujące własności:

α) jest ona większa od każdej z długości, mierzonych przez liczby wymierne kategoryi A;

β) jest mniejsza od każdej z długości, mierzonych przez liczby wymierne kategoryi B.

Fakt podwójny, że długość a, gdy istnieje, jest koniecznie niespółmierna z jednością i że jest jedyną, dowodzi się z wielką łatwością. Natomiast trudniej uzasadnić istnienie długości a. Lecz i to, jak zobaczymy, da się uskutecznić, jakkolwiek, zdaniem naszem, w wykładzie elementarnym lepiej wprost podać to twierdzenie, nadmieniając tylko, że może być udowodnionem.

To powiedziawszy, rozważmy półprostą OX i na niej punkt P. Musi zajść jedno z dwóch: albo pomiędzy długościami, mierzonemi przez liczby wymierne kategoryi A, znajdzie się długość większa niż OP, albo też będzie to niemożliwem.

W przypadku pierwszym powiedzmy, że punkt P należy do kategoryi R, w drugim powiedzmy, że należy do kategoryi S. Jest jasnem, że na OX istnieć będzie nieskończoność punktów każdej kategoryi. Punkty każdej kategoryi tworzyć będą ciąg nieprzerwany, co znaczy, że gdy C i D są dwoma punktami tej samej kategoryi, to każdy punkt odcinka CD należyć również będzie do tej kategoryi. To wskazuje nam, że półprosta OX dzieli się na dwie dziedziny: jednę, utworzoną przez ogół punktów kategoryi R, drugą przez ogół punktów kategoryi S'. Te dwie dziedziny rozdzielać będzie pewien punkt M. Z warunku 2-go, przepisanego dla rozdziału liczb wymiernych na dwie kategorye, wynika, że punkt M należyć będzie sam do kategoryi S. To zrozumiawszy, przekonamy się następnie, że długość OM jest właśnie tą długością, której istnienie miało być udowodnione.

Zbierając poprzednie rozważania, przychodzimy do następujących wyników:

A. Przez liczbę niewymierną rozumiemy każdy symbol, określający rozdział ogółu liczb wymiernych na dwie kategorye A i B, mające powyżej wysłowione trzy własności.

B. Przez długość, mierzoną przez liczbę niewymierną φ, rozumiemy długość, która sprawdza warunki α), β).

C. Każdej długości niespółmiernej z jednostką odpowiada liczba niewymierna, która ją mierzy, i odwrotnie, każda liczba niewymierna mierzy długość niespółmierną z jednostką.

2. Powiemy, że liczba niewymierna φ jest większa lub mniejsza od liczby wymiernej $\frac{m}{p}$, stosownie do tego, czy długość, którą mierzy, będzie większa lub mniejsza od długości, mierzonej przez liczbę $\frac{m}{p}$. Jest jasnem, że kierunek nierówności pomiędzy liczbą niewymierną i liczbą wymierną, nie zależy wcale od wyboru jednostki długości.

Dwie liczby niewymierne φ i ψ nazywają się równemi, gdy mierzą (przy tej samej jednostce) tę samą długość. Aby więc dwie liczby niewymierne były równemi, potrzeba i wystarcza, aby każdej z nich odpowiadał ten sam podział liczb wymiernych na dwie kategorye.

Powiemy wreszcie, że liczba niewymierna φ jest mniejsza od innej liczby niewymiernej ψ, gdy długość mierzona liczbą φ będzie mniejsza od długości mierzonej liczbą ψ. Widzimy, że aby było $\varphi < \psi$, potrzeba i wystarcza, by można było znaleść liczbę wymierną mniejszą od ψ i jednocześnie większą od φ. Wynika stąd, że kierunek nierówności pomiędzy dwiema liczbami niewymiernemi jest niezależny od wyboru jednostki długości. Powiemy dalej, że liczba wymierna r jest przybliżeniem przez niedomiar na ε, — gdzie ε jest wymiernem — liczby niewymiernej φ, gdy mamy:

$$r < \varphi < + \varepsilon.$$

3. Teorya działań na liczbach niewymiernych rozwija się z wielką łatwością, przy oparciu się na następującem twierdzeniu:

Każda liczba wymierna, czy niewymierna jest określona niedwuznacznie przez wszelki ogół danych, pozwalających na obliczenie wartości wymiernej, przybliżonej przez niedomiar na ε, gdzie ε jest ilością małą według upodobania.

Dla krótkości pomijam dowód tego twierdzenia i ograniczam się na uwadze, że prawdziwość jego wyłania się dostatecznie dla intuicyi, tak, że można je przyjąć bez dowodu w wykładzie elementarnym.

To założywszy, zbudujemy teoryę czterech działań zasadniczych na podstawie uwagi, że określenia działań, podane przez nas dla liczb wymiernych, rozciągają się bez zmiany i na liczby niewymierne. W każdym z czterech przypadków będzie trzeba okazać, w jaki sposób z wymiernych przybliżonych wartości liczb, na których wykonywamy działania, można będzie wyprowadzić przybliżone wymierne wartości rezultatu. Prawidła, jakie przy tem otrzymujemy, narzucają się umysłowi z taką widocznością, że i tu będzie można w kursie elementarnym ograniczyć się na wysłowieniu twierdzeń, nie wchodząc w ich dowodzenia.

IV

Stosunek dwu długości.

Niezbędnem jest uzupełnienie powyższych rozważań w sposób następujący:

Nazywamy stosunkiem długości a do długości b liczbę mierzącą długość a, gdy długość b przyjmujemy za jednostkę.

Twierdzenie zasadnicze. Stosunek długości a do długości b równa się ilorazowi z liczby, mierzącej długość a przy jednostce jakiejkolwiek u, przez liczbę, mierzącą długość b przy tej samej jednostce.

Dowodzenie jest bezpośredniem. Niechaj α będzie liczbą mierzącą długość a, β — odpowiednią liczbą dla b, r — szukanym stosunkiem. Według określenia mnożenia mamy:

$$\alpha = r\beta,$$

stąd

$$r = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad \text{c. b. d. o.}$$

V.

Zastosowanie powyższych teoryj.

Sądzimy, że dla ocenienia wartości pedagogicznej pewnego sposobu wykładu teoryi, nie tylko trzeba liczyć się z prostotą i ścisłością metody, lecz także koniecznem jest zbadać, w jakim stopniu ułatwia ona zastosowanie teoryi.

Otóż właśnie pod tym względem metoda powyższa przedstawia, zdaje mi się, istotne korzyści. Można o tem sądzić z następującego przykładu:

Niechaj A, B i C będą punktami spotkania trzech równoległych Δ_1, Δ_2, Δ_3 na jednej płaszczyźnie z poprzeczną, A', B', C' — punktami spotkania tych z równoległych z inną poprzeczną. Mamy dowieść, że

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}. \tag{1}$$

Przejdźmy odrazu do przypadku, w którym AB i BC są niewymiernemi. Połóżmy

$$\varphi = \frac{AB}{BC}, \quad \varphi' = \frac{A'B'}{B'C'},$$

i rozważmy pewną liczbę wymierną a; będzie ona mniejsza lub większa od φ. Niechaj będzie najprzód

$$a < \varphi; \tag{2}$$

wtedy będzie można znaleść na AB punkt A_1, zawarty pomiędzy A i B aby było

$$\frac{A_1B}{BC} = a.$$

Poprowadźmy przez punkt A_1 równoległą do prostych Δ_1, Δ_2, Δ_3; równoległa ta przetnie odcinek $A'B'$ w punkcie A'_1, położonym pomiędzy A' i B', i będzie:

$$\frac{A'B'}{B'C'} < \frac{A'B'}{B'C'};$$

ponieważ A_1B i BC są spółmiernemi, to będzie

$$\frac{A'_1B'}{B'C'} = \frac{A_1B}{BC} = a.$$

Wynika stąd, że nierówność (2) pociąga za soba nierówność

(3) $$a < \varphi'.$$

W podobny sposób okażemy, że nierówność

$$a > \varphi$$

pociąga za sobą drugą nierówność

$$a > \varphi'$$

A więc każda liczba wymierna mniejsza od φ jest zarazem mniejsza od φ' i każda liczba wymierna większa od φ jest zarazem większa od φ'. A stąd:

$$\varphi = \psi' \qquad \text{b. c. d. o.}$$

Czytelnik spostrzegł bezwątpienia, że w dowodzeniu powyższem stosowano jedynie samo pojęcie liczby niewymiernej bez uciekania się do innych części teoryi.