PIERWSZE ZASADY METAGEOMETRYI

CZYLI

GEOMETRYI OGÓLNEJ

napisał

P. Mansion [1]).

Quidquid contradictionem non implicat,
Deus potest. Ś-ty Tomasz C G. II. 22.

TREŚĆ.

I.

Wstęp.

W ciągu upłynionego stulecia matematycy poddawali podstawy zasadnicze nauki o przestrzeni badaniu krytycznemu, które doprowadziło ich do utworzenia, obok geometryi zwykłej, dwu innych

[1]) Szanowny autor upoważnił nas do ogłoszenia w „Wiadomościach matematycznych" przekładu tej pracy, która jest streszczeniem odczytów, mianych w „Institut supérieur de Philosophie" w Louvain dnia 16 maja, 30 maja i 6 czerwca 1895. *S. D.*

systemów geometryi, również dopuszczalnych tak pod względem ścisłości logicznej jak i pod względem stosowania ich do badania świata fizycznego.

Pierwszym z tych systemów jest geometrya Łobaczewskiego, nazwana tak od imienia uczonego (1793—1856), który znalazł jej podstawy około r. 1826 i podał jej wykład zupełny w licznych pismach, ogłoszonych w czasie od r. 1829—1856 [1]).

Drugi system stanowi geometrya riemannowska, której idea zasadnicza, bez żadnego prawie wszakże rozwinięcia, została podana przez Riemanna (1826—1866) w roku 1854, lecz ogłoszona dopiero w 1867 r. [2]).

Ogół tych trzech geometryj: euklidesowej, geometryi Łobaczewskiego i riemannowskiej, mających zresztą część wspólną, stanowi tak nazwaną Metageometryę lub Geometryę ogólną.

Fakt istnienia trzech różnych systemów geometryi ma wielką ważność z punktu widzenia filozoficznego. W samej rzeczy, pociąga on ze sobą obalenie jednej z podstaw dzieła Kanta: Kritik der reinen Vernunft, oraz stwierdza czczość tego, co można nazwać jego geometrycznym imperatywem.

Pragniemy tu wyłożyć sposobem elementarnym i pod formą dydaktyczną zasady metageometryi aż do podziału jej na trzy gałęzie oraz naszkicować konsekwencye filozoficzne, jakie stąd wyprowadzić można.

Wykład ten poprzedzimy krótkim zarysem historycznym najważniejszych prac nad zasadami geometryi od Euklidesa do De Tilly'ego. Czytelnik, który zechce podążyć za nami, będzie mógł stopniowo pozbyć się uprzedzenia, że może

---

[1]) Całkowite wydanie dzieł geometrycznych Łobaczewskiego profesora uniwersytetu kazańskiego, wydane zostało przez tenże uniwersytet w dwóch tomach in 4°, str. 680. Tom I Kazań. 1883: prace w języku rosyjskim, Tom II Kazań. 1886: prace w językach niemieckim i francuskim.

[2]) Pod tytułem: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Rozprawy Getyngskie. 1867, t. XIII). powtórzone w zbiorowem wydaniu dzieł Riemanna (wyd. 1-o 1876, str. 254—269). Rozprawa ta istnieje w przekładzie polskim S. Dicksteina i Wł. Gosiewskiego (Pam. Tow. nauk ścisłych w Paryżu (t. IX r. 1877).

istnieć tylko jeden system geometryi oraz oswoić się z nowemi poglądami, które napotka później w dwu systemach geometryi nieeuklidesowej. Tym sposobem czytelnik, zanim stwierdzi wartość tych systemów z punktu widzenia logiki oraz badania przyrody, da im przystęp do swego umysłu, gdy dowie się, jakie to wybitne nazwiska przywiązane są do badań nad tym przedmiotem.

II.

Zarys historyczny.

Geometryę elementarną, jako naukę, utworzyli grecy w czasie od VI do III wieku przed Chr. Główne jej postępy można związać z kilkoma sławnemi imionami. Tales (640—548) lub jeden uczniów jego znalazł, że suma trzech kątów trójkąta równa się dwóm kątom prostym; Pytagoras (580—500), że w trójkącie prostokątnym kwadrat, wystawiony na przeciwprostokątnej, równa się sumie kwadratów, wystawionych na pozostałych bokach; Eudoxus (408—355), że ostrosłup jest trzecią częścią graniastosłupa o tej samej podstawie i tej samej wysokości. Temuż matematykowi zawdzięczamy teoryę proporcyj pomiędzy wielkościami niespółmiernemi. Archimedes (287—212), prócz wielu prawd matematycznych natury bardzo utajonej, odkrył nowe własności zasadnicze okręgu koła, walca, stożka i kuli.

Euklides (około r. 300), nieco wcześniejszy od Archimedesa, zebrał w swych „Elementach" odkrycia geometryczne poprzedników swoich [1]), nie dodawszy nic istotnie nowego, lecz podstawiwszy niewzruszone dowody zamiast dowodzeń, które często bywały zbyt mało ścisłemi.

Doskonałość logiczna „Elementów" Euklidesa zapewniła im niezaprzeczoną królewskość w nauczaniu aż do pojawienia się „Początków geometryi" (Éléments de Géométrie) Legen-

---

[1]) Księga I—VI, XI—XIII „Elementów" są poświęcone geometryi; księgi VII—X arytmetyce, nauce, w której Euklides był bardziej oryginalnym niż w geometryi: księga X jest prawie całkowicie zbiorem jego własnych poszukiwań.

dre'a (1752—1833) w r. 1794. Mniej ścisła, lecz za to pełniejsza od „Elementów“ Euklidesa, zawiera ta książka Legendre'a: wykład odkryć Archimedesa w geometryi elementarnej; teoryę trójkątów kulistych, która była też znaną starożytnym i której początki sięgają być może Eudoxusa; wreszcie noty uczone, odnoszące się do trudniejszych punktów, oraz traktat trygonometryi.

W „Elementach“ Euklidesa teorya linij równoległych i wszystko, co od niej zależy, polega na twierdzeniu następującem: Dwie proste na płaszczyźnie, tworzące z trzecią prostą, po tej samej stronie tej ostatniej, kąty wewnętrzne, których suma jest mniejsza od dwu kątów prostych, spotykają się z tej właśnie strony. Twierdzenie to, nazywane często postulatem Euklidesa, jest w rzeczy samej piątym z sześciu postulatów [1]), które geometra grecki postawił na czele swej księgi nieśmiertelnej.

Od Euklidesa do Legendre'a wszystkie usiłowania matematyków, zajmujących się zasadami geometryi, ześrodkowywały się prawie wyłącznie na piątym postulacie Euklidesa. W przeciągu przeszło dwóch tysięcy lat czyniono próżne wysiłki, by postulat ten wywnioskować z twierdzeń poprzednio dowiedzionych. Ptolemeusz i Proklus w starożytności, Nassiredin w wiekach średnich, Clavius w czasie Odrodzenia, Wallis (1616—1707) i wielu innych, usiłujących dowieść tego postulatu, nie potrafili uczynić nic więcej, tylko zastąpić go postulatami prawie równoważnemi. Pomiędzy temi ostatniemi zdaje się, jedynie postulat Wallisa (1693): istnieją trójkąty podobne — przeżył swego twórcę [2]). W roku 1733 O. Saccheri, jezuita

[1]) Postulaty te podajemy dosłownie w dwu paragrafach następnych; znajdują się one razem z dziewięcioma aksiomatami po definicyach pierwszej księgi Euklidesa. W niektórych rękopisaeh (lecz nie w najlepszyeh) i w wielu edycyach postulaty czwarty, piąty i szósty stały się aksiomatami 10, 11 i 12-ym.

[2]) Co do wskazówek bibliograficznych, odnoszących się do rozmaitych autorów, o których mowa tu i w następstwie patrz nasz artykuł p t.: „Notice sur les recherches de M. De Tilly en Métagéométrie (Revue des questions scientifiques, 2-e série, t. VII, p. 584—595, 1895, tub Mathesis, 2-e série t. V, 1891. Supplément) i nasze sprawozdanie o dziele Stäckela; „Theorie der Parallellinien von

(1667—1733), bezwiednie odkrył nowy punkt widzenia, badając, co stanie się z zasadami geometryi, jeżeli się przypuści, że piąty postulat Euklidesa nie jest prawdziwym. Rozumując w tem przypuszczeniu, podał on wiele twierdzeń, między innemi następujące: „Dwie proste, położone na jednej płaszczyźnie, mogą zajmować trzy różne położenia względem siebie [1]: albo spotykają się, albo zbliżają się do siebie nieograniczenie bez spotkania, albo wreszcie mają prostopadłą wspólną, od której począwszy, rozchodzą się (Twierdzenie Saccheri'ego).

Lambert (1728—1777) jest na tej samej drodze, co Saccheri. Dowodzi on, że w przypadku, gdy postulat Euklidesa prawdziwym nie jest, powierzchnia trójkąta jest proporcyonalna do jego niedomiaru kątowego (Twierdzenie Lamberta, 1766, ogłoszone w 1786). Niedomiarem kątowym nazywamy różnicę pomiędzy dwoma kątami prostemi a sumą kątów trójkąta, która w uważanym przypadku jest zawsze mniejsza od dwu kątów prostych.

Taurinus (1794 — 1874) śmiałem przeczuciem znalazł (1826) dla tegoż przypadku wzór zasadniczy trygonometryi.

Saccheri, Lambert i Taurinus, nie wątpią zresztą wcale o bezwzględnej prawdziwości piątego postulatu Euklidego i uciekają się bezwiednie do innych postulatów, mniej lub więcej pozornych, dla wyprowadzenia go z poprzednich twierdzeń geometryi. Lecz równocześnie Lambert, a zwłaszcza Taurinus spostrzegają, dlaczego nie dochodzimy nigdy do sprzeczności, przypuszczając, że piąty postulat nie jest prawdziwym. Pochodzi to stąd, mówi drugi z nich, że istnieją prawdopodobnie powierzchnie krzywe, na których pewne linie krzywe mają własności analogiczne do własności linii prostej na płaszczyznie, jeżeli pozostawimy na uboczu własności, wyrażone piątym postulatem Eukli-

---

Euclid bis auf Gauss (Ib. t. VIII, p. 603–613, 1891 lub Mathesis, 2-e série, t. VI, 1896, Supplément).

[1]) W geometryi nieeuklidesowej dwie proste mogą zajmować tylko dwa różne położenie wzajemne: albo się spotykają, albo mają prostopadłą wspólną i wtedy są wszędzie w równej od siebie odległości.

desa[1]). Tak za Lambertem powiada on, że koła wielkie na kuli mają własności, bardzo podobne do własności prostych na płaszczyźnie, prócz własności, wyrażonej w piątym postulacie Euklidesa: dwie proste nie mogą zamykać przestrzeni.

Legendre (opierając się milcząco na tym ostatnim postulacie) mógł dowieść z zupełną ścisłością dwu twierdzeń, któremi zajmowali się już byli Saccheri i Lambert, mianowicie: 1-o W trójkącie suma kątów nie może być większa od dwu kątów prostych (r. 1800). 2-o Jeżeli w jednym trójkącie suma kątów jest równa dwóm kątom prostym, to jest takąż we wszystkich trójkątach (twierdzenie z r. 1808, ogłoszone w r. 1833). Zresztą Legendre, podobnie jak wszyscy poprzedzający go geometrowie, napróżno usiłował udowodnić piąty postulat Euklidesa; wszakże próby jego dowodów, wielce godne uwagi, mogły go były doprowadzić do jednej z prawd zasadniczych metageometryi, t. j. do tego, że własności przestrzeni zależą od pewnego parametru.

Około r. 1819 lub może wcześniej, najznakomitszy z matematyków niemieckich Gauss (1777—1855) i prawnik Schweikart (1780—1857), doszli, niezależnie jeden od drugiego, do przekonania, że piąty postulat Euklidesa absolutnie dowieść się nie da, ponieważ nie zawiera się w pojęciu klasycznem prostej. Jeżeli odrzucimy ten postulat, to będzie można ustanowić geometryę ogólniejszą od geometryi Euklidesa i zupełnie ścisłą; geometrya euklidesowa jest jej przypadkiem szczególnym, a właściwie przypadkiem granicznym. Jedynie doświadczenie może stwierdzić, czy ten przypadek graniczny lub inny przypadek szczególny, bardzo blizki, jest urzeczywistniony w przyrodzie. Sławny astronom Bessel (1784—1846), pod wpływem Gaussa i Schweikarta, doszedł także do przekonania, że geometrya fizyczna nie jest, być może, geometryą euklidesową. Ani Gauss ani Schweikart nie ogłosili nic o tej geometryi ogólniejszej, o której mówimy, lecz nie

---

[1]) Był to pomysł zupełnie uzasadniony: Beltrami w r. 1868 dowiódł, że w rzeczy samej linie geodezyjne pseudosfery mają te własności, o których wyżej mowa, i wyprowadził stąd wniosek, że piąty postulat Euklidesa nie daje się udowodnić w geometryi płaskiej.

pozostali bez wpływu na siostrzeńca tego ostatniego Taurinusa, który pozostawał z nimi w korespondencyi.

Dwaj młodsi od Gaussa uczeni: jeden rosyjski Łobaczewski, drugi węgierski Jan Bolyai (1802—1860) doszli do tych samych wyników, co Gauss. Bolyai w r. 1832 w dodatku do dzieła swego ojca ogłosił krótki wykład systemu geometryi, niezależnej od piątego postulatu Euklidesa. Łobaczewski dnia 12/24 Lutego 1826 r. miał lekcyę publiczną o tym przedmiocie w uniwersytecie kazańskim, w r. 1829 zaś ogłosił zasady tej nowej geometryi, która słusznie nosi obecnie nazwę geometryi Łobaczewskiego. W ciągu przeszło ćwierci wieku aż do roku 1856 z niepokonaną wytrwałością rozwijał on badania swe w tej dziedzinie, lubo znikąd nie dostawał zachęty [1]).

W r. 1854 Riemann wypowiedział w swej lekcyi wstępnej kilka nowych i głębokich myśli o zasadach geometryi, ogłoszonych drukiem dopiero w r. 1867, po śmierci tego wielkiego geometry [2]). Istotę zasadniczą części tych pomysłów można streścić w ten sposób: Szósty postulat Euklidesa, podobnie jak i piąty, nie zawiera się w zwykłej definicyi linii prostej. Odrzucając ten szósty postulat, można utworzyć geometryę różną od geometryi Łobaczewskiego i także ogólniejszą od geometryi Euklidesa, której ta ostatnia jest również przypadkiem granicznym. Jest to właśnie geometrya riemannowska.

De Tilly, nie znając badań Łobaczewskiego, znalazł wszystkie jego rezultaty zasadnicze drogą sobie właściwą, nieco po roku 1860. W roku 1868 ogłosił De Tilly cynematykę statykę i dynamikę, odpowiadającą systemowi Łobaczewskiego. W roku 1872 i 1873 wykazał, że piąty postulat Euklidesa nie daje się udowodnić żadnem rozumowaniem geometrycznem. W r. 1878 podał zupełny wykład zasad geometryi ogólnej, wychodząc z pojęcia odległości lub przedziału pomiędzy dwoma punktami. To pojęcie pierwotne, które już Cauchy w r. 1833 uczynił był podstawą geometryi. rozstrząsa De Tilly z magistralną ścisłością i wyprowadza z niego kolejno geometrye: Riemanna,

---

1) Patrz wyżej przypisek na str. 2-ej

2) Patrz wyżej przypisek na str. 2-ej.

Łobaczewskiego i Euklidesa. W r. 1893 poszedł jeszcze dalej i wykazał, że każda z tych geometryj zawarta jest całkowicie w związkach Lagrange'a i Scheringa pomiędzy odległościami wzajemnemi pięciu punktów.

Nikt, o ile wiemy, nie badał głębiej od De Tilly'ego podstaw zasadniczych geometryi. To też w poniższym wykładzie prace jego przewodniczyć nam będą, jakkolwiek postaramy się formę naszego wykładu zbliżyć, o ile można, do euklidesowej, celem uprzystępnienia metageometryi większej liczbie czytelników [1]).

III.

Definicye i cztery pierwsze postulaty [2]).

1. Punktem jest to, co nie ma części (Euklides I. Def. 1).

2. Linia jest długością bez szerokości. Krańce linii są punktami (I. Def. 2, 3).

3. Powierzchnia jest to, co ma tylko długość i szerokość. Krańce powierzchni są liniami (I. Def. 5, 6).

4. Bryła jest to, co posiada długość, szerokość i grubość. Krańce bryły są powierzchniami (XI. Def. 1, 2).

5. Linia prosta jest to linia, która leży jednakowo na wszystkich swoich punktach (I. Def. 4).

---

[1]) Znakomici geometrowie Cayley, Klein, Darboux, Poincaré, Beltrami, Riemann, Helmholtz, Lie i inni badali wyczerpująco różne teorye analityczne i geometryczne, mające najściślejszy związek z poszukiwaniami, których dzieje przedstawiliśmy treściwie pod formą elementarną. W ten sposób dowiedli pośrednio wielu twierdzeń geometryi ogólnej. Dla braku dostateczne kompetencyi nie możemy podać tu zarysu tych poszukiwań.

[2]) W poniższym wykładzie podajemy definicye, postulaty i twierdzenia według „Elementów" Euklidesa, ponieważ dzieło to stanowi po dzień dzisiejszy najbardziej znany i ścisły podręcznik geometryi. Posługujemy się wielkiem wydaniem greckiem, łacińskiem i francuskiem Peyrarda (Paryż 1814, 1816, 1818, 3 tomy in 4⁰). Dajemy zresztą z definicyj to, co jest niezbędnie koniecznem, prócz jednego wyjątku, i nie przytaczamy dziewięciu aksiomatów Euklidesa, ponieważ te, z których korzystamy milcząco, są przyjęte przez wszystkich.

Uwaga. Powiemy na początku następnego paragrafu, jak definicyę tę, o której tyle dyskutowano, rozumieli Euklides i wszyscy geometrowie.

Postulat pierwszy[1]). Przeprowadzić od jakiegokolwiek punktu do jakiegokolwiek innego linię prostą (I. Post. 1).

Postulat drugi. I przedłużyć w linii prostej i sposobem ciągłym linię ograniczoną (I. Post. 2).

6. Powierzchnia płaska jest taka, która leży jednakowo na wszystkich prostych, które zawiera (I. Def. 7 [2]).

7. Koło jest figurą płaską, objętą jedną linią, którą nazywamy okręgiem tak, że wszystkie proste, poprowadzone do okręgu z pewnego punktu, umieszczonego na tej figurze, są równemi. Ten punkt nazywa się środkiem koła (I. Def. 15, 16), proste zaś nazywają się promieniami.

Postulat trzeci. Nakreślić koło z jakiegokolwiek środka i o jakimkolwiek promieniu (I. Post. 3).

8. Kula jest powierzchnią taką, że wszystkie proste, poprowadzone z punktu, nazwanego środkiem, do punktów tej powierzchni, są równemi sobie. Te proste nazywają się promieniami kuli (XI. Def. 14—17 zmienione).

9. Kąt prostokreślny jest to wzajemne nachylenie dwóch prostych (I. Def. 8—9 skrócone).

10. Gdy prosta spotyka drugą i tworzy z nią dwa kąty równe: jeden po jednej, drugi po drugiej stronie, to każdy z tych kątów

---

[1]) Można głębiej, niż to uczynił Euklides, badać pojęcia zasadnicze geometryi i powiększyć znacznie liczbę postulatów. Patrz np. prace matematyka włoskiego Peano: „I principii di Geometria logicamente esposti“ (Turyn, Bocca, 1889, 8°, str. 40) i „Sulle fondamenti della Geometria“ (Rivista di matematica, 1894, IV, str. 51—90)“. W ostatnim paragrafie rozprawy niniejszej pokazujemy, w jaki sposób Cauchy sprowadza pojęcia prostej i płaszczyzny do pojęcia odległości. Lecz należy zauważyć, że postulaty 5-y i 6-y są prawie jedynemi, któremi poważnie zajmowali się geometrowie.

[2]) Prosimy czytelnika, aby dopuścił możność istnienia podobnej powierzchni, jako postulat dodatkowy, aż do naszego paragrafu końcowego Definicyę Euklidesa rozumiano zawsze w sensie definicyi Legendre'a: Płaszczyzna jest to powierzchnia, w której, gdy weźmiemy dwa punkty dowolne i połączymy je prostą, to linia ta będzie całkowicie leżała na powierzchni.

nazywa się prostym, i pierwsza linia nazywa się prostopadłą do drugiej (I. Def. 9).

Postulat czwarty. Wszystkie kąty proste są równe sobie (I. Post. 4 [1]).

11. Kąt rozwarty jest to kąt większy od prostego (I. Def. 11).

12. Kąt ostry jest to kąt mniejszy od prostego (I. Def. 12).

13. Figury prostokreślne lub wielokąty są zakończone liniami prostemi (I. Def. 20).

14. Figury trójboczne lub trójkąty są utworzone przez trzy proste; czworoboki—przez cztery proste (I. Def. 21, 22).

15. Trójkąt równoboczny jest to trójkąt, mający trzy boki równe; równoramienny—dwa boki równe; różnoboczny—trzy boki różne; prostokątny—który ma kąt prosty; rozwartokątny—kąt rozwarty; ostrokątny—trzy kąty ostre (I. Def. 24—29 [2]).

16. Czworobok jest kwadratem, gdy ma wszystkie boki równe i kąty równe; prostokątem—gdy ma tylko kąty równe; kwadratem ukośnym lub rombem—gdy ma tylko boki równe; romboidem—gdy jego boki i kąty przeciwległe są równe (I. Def. 30—33 zmienione [3]).

IV.

Postulaty piąty i szósty. Trzy geometrye.

Wyżej podana definicya prostej, nawet gdy ją uzupełnimy za pomocą postulatów 2, 3, 4 wyraża jedynie zupełną jednorodność

---

[1]) Ten postulat, pozornie bezpożyteczny, jest w rzeczy samej niezbędny, jak to powiedzieliśmy już dawniej, dla tego, aby uniknąć rozpatrywania w jednym i tym samym systemie geometryi różnych gatunków linij prostych. Wprowadzenie tego postulatu przez Euklidesa do „Elementów“ pokazuje, jak głęboko badał on zasady geometryi.

[2]) Możność istnienia figur, mających powyższe własności, wyprowadza się dość łatwo z rozmaitych twierdzeń elementarnych Euklidesa.

[3]) Dajemy te definicye, niepotrzebne nam w dalszym wykładzie, dla pokazania, w jaki sposób należy zmodyfikować definicye Euklidesa, aby módz przystosować je do geometryi ogólnej. Można jeszcze łatwo, przy pomocy „Elementów“, wykreślić figury, o których mowa w Nr. 16.

linii, t. j. tożsamość wszystkich prostych i wszystkich części każdej z nich. Słowem, prosta jest linią jednorodną całkowicie określoną przez dwa którekolwiek ze swych punktów, dostatecznie zbliżone.

Euklides w swym wykładzie geometryi używa jeszcze dwóch innych postulatów, odnoszących się do prostej, a mianowicie:

Postulat piąty. Jeżeli prosta, spotykająca dwie proste (leżące na tej samej płaszczyźnie), tworzy z jednej strony kąty wewnętrzne, których suma jest mniejsza od dwu kątów prostych, to proste te, przedłużone nieograniczenie, spotykają się z tej strony, po której suma jest mniejsza od dwu kątów prostych (I, postulat 5).

Postulat szósty. Dwie proste nie zamykają przestrzeni (I, postulat 6).

Określamy geometryę euklidesową jako tę, która przyjmuje postulaty 5 i 6; riemanowską jako tę, w której odrzucamy postulat 6, w której przeto, jak to okażemy, postulat 5 daje się udowodnić, jako wynik z twierdzeń go poprzedzających; geometryę Łobaczewskiego, jako tę, w której odrzucamy postulat 5, w której zatem, według tego co powiedziano, postulat 6 zachodzi koniecznie, gdyż odrzucenie go równałoby się przyjęciu istnienia postulatu 5-go.

Jest wiele własności prostej a także płaszczyzny i przestrzeni, odmiennych w trzech geometryach. Lecz liczne znów inne własności są niezależne od postulatów 5 i 6 i tworzą część wspólną wszystkim trzem systemom. Są i takie własności, które są wspólnemi tylko dwóm systemom.

Podamy pierwsze 26 twierdzeń Euklidesa, które nie opierają się ani na postulacie 5-ym, ani też w pewnym sensie, jak to powiemy niżej, na postulacie 6-ym, a więc należą do trzech geometryj.

V.

Dwadzieścia sześć twierdzeń elementarnych, wspólnych trzem geometryom.

W wykładzie poniższym opuszczamy dowodzenia lub rozwiązania, łatwe do znalezienia lub identyczne z dowodzeniami i rozwiązaniami L e g e n d r e'a; inne szkicujemy tylko, pozostawiając w ogólności czytelnikowi trud kreślenia figur. W pierwszem stadyum dogodniej jest przyjąć, że poniższe twierdzenia są wyłożone tylko w geometryi euklidesowej i w geometryi Ł o b a c z e w s k i e g o; następnie po twierdzeniu XXXIII, którego miejsce logiczne powinnoby być właściwie przed paragrafem niniejszym, wprowadzić do pewnej liczby tych podań pewne ograniczenia niezbędne,—jak to wskażemy po podaniu XXIII-em—na to, aby te twierdzenia były też prawdziwemi i w geometryi riemannowskiej.

I. Na prostej danej i skończonej nakreślić trójkąt równoboczny [Patrz Legendre, II. Zad. 10].

II. Od punktu danego A poprowadzić prostą, równą prostej danej BC. [Łączymy A i B prostą, na AB kreślimy trójkąt równoboczny ABD; okrąg, zakreślony ze środka B promieniem BC, przecina prostą DB przedłużoną w punkcie E; okrąg ze środka D, zakreślony promieniem DE, przecina prostą DA przedłużoną w punkcie F. Linia $AF = BC$. Konstrukcya ta opiera się jedynie na trzech pierwszych postulatach i na podaniu I].

III. Dane są dwie proste nierówne; odjąć od większej prostą, równą mniejszej. [Rozwiązanie sprowadza się do poprzedzającego].

IV. Dwa trójkąty są równe, gdy mają kąt równy, zawarty między dwoma bokami odpowiednio równemi [patrz L e g e n d r e, I, post. 6].

V. W trójkącie równoramiennym BAC kąty B i C, przeciwległe bokom równym AC, AB są równe. Przedłużamy boki AC i AB poza C i B, odpowiednio do E i D; kąty CBD i BCE będą także równe. [Weźmy $CE = BD$ na przedłużeniach boków AC, AB; poprowadźmy proste CD, BE; trójkąty ACD, ABE, następnie BCD i BCE są równe i t. d.].

VI. Odwrotnie, jeżeli w trójkącie dwa kąty są równe, to boki im przeciwległe będą równe i trójkąt będzie równoramiennym. [Patrz Legendre, I, 13].

VII. Dwa trójkąty ABC, ABD, położone po jednej stronie prostej AB, nie mogą być takiemi, aby było $AC = AD$, $BC = BD$. [Poprowadźmy CD, trójkąty ACD, BCD są równoramienne; jeżeli C jest zewnątrz trójkąta ABD i D zewnątrz trójkąta ABC, kąt ACD jest większy od BCD lub równego mu BDC, a zatem większy od ADC, co jest niedorzecznością, gdyż $ACD = ADC$; jeżeli C jest wewnątrz ADB, to niechaj EC, FD będą przedłużeniami boków BC, BD, wtedy kąt ACD jest większy od ECD lub od równego mu FDC, a więc większy od ADC, co jest niedorzecznością, gdyż $ACD = ADC$.]

VIII. Dwa trójkąty są równe, gdy mają po trzy boki odpowiednio równe. [Dowodzenie przy pomocy twierdzenia poprzedzającego].

IX. Podzielić kąt dany na dwie równe części. [Patrz Legendre, II. Zad. 5].

X. Podzielić prostą daną na dwie części równe. [Patrz Legendre, II. Zad. 1].

XI. Z punktu danego na prostej wystawić do niej prostopadłą. [Patrz Legendre, II. Zad. 2].

XII. Z punktu danego zewnątrz prostej poprowadzić do niej prostopadłą. [Patrz Legendre, II. Zad. 3].

XIII. Każda prosta, spotykająca drugą, tworzy z nią dwa kąty przyległe, których suma jest równa dwóm kątom prostym. [Patrz Leg. I. Zad. 2].

XIV. Jeżeli suma dwóch kątów przyległych równa się dwóm kątom prostym, to ramiona zewnętrzne tych kątów leżą na jednej prostej. [Patrz Leg., I. Zad. 4].

XV. Jeżeli dwie proste przecinają się, to kąty wierzchołkiem przeciwległe są równe. [Patrz Leg., I. Zad. 5].

Wniosek. Jeżeli prosta tworzy, z jednej i drugiej strony punktu, kąty równe z dwiema innemi prostemi, to te ostatnie są przedłużeniem jedna drugiej.

XVI. Gdy przedłużymy wzdłuż BD (Fig. 1) bok AB trójkąta ABC, to kąt zewnętrzny CBD będzie większy od każdego z kątów wewnętrznych nieprzyległych BAC, BCA. [Niechaj E będzie środkiem boku BP; przedłużmy AE o długość $EF = AE$, poprowadźmy FB. Trójkąt $BEF = ACE$, więc bok $BCA = BCF < CBD$. W ten sam sposób stwierdzamy, że kąt wierzchołkiem przeciwległy względem kąta CBD jest większy od CAB.

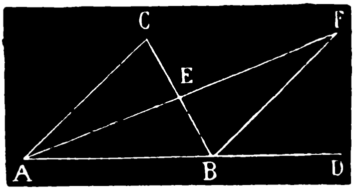

Fig. 1.

XVII. Suma dwu kątów trójkąta jest mniejsza od dwu kątów prostych. [Wynik z twierdzenia poprzedzającego].

XVIII. W trójkącie ABC naprzeciw boku większego AC leży kąt większy B. [Na boku $AC > AB$ odetnijmy długość $AD = AB$, będzie kąt $B > ABD$, który jest równy kątowi $ADB > C$].

XIX. W trójkącie naprzeciw kąta większego leży bok większy. [Wynik twierdzenia poprzedzającego].

XX. W trójkącie ABC bok AB jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych boków AC, CB. [Przedłużmy AC na długość $CD = BC$ poprowadźmy DB; będzie kąt $D =$ kątowi $DBC < DBA$, a zatem $AB < DA$, DA zaś $= BC + CB$].

W n i o s e k. W wielokącie jeden bok jest mniejszy od sumy pozostałych boków.

XXI. Jeżeli z punktu, wziętego wewnątrz trójkąta, poprowadzimy do końców jednego boku dwie proste to suma tych prostych będzie mniejsza od sumy dwu pozostałych boków trójkąta, a kąt pomiędzy temi prostemi będzie większy od kąta pomiędzy bokami. [Dowodzenie za pomocą podań 16 i 20; patrz także L e g. I, 9].

XXII. Nakreślić trójkąt, mający jako boki trzy proste, z których każda jest mniejsza od sumy dwóch pozostałych. [Patrz Leg. II. Zad. 10].

XXIII. W punkcie prostej danej nakreślić kąt równy danemu. [Patrz Leg., II. Zad. 4].

XXIV. Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są równe dwóm bokom drugiego i jeżeli kąt, zawarty pomiędzy temi bokami w pierwszym trójkącie, jest mniejszy od kąta, zawartego między odpowiedniemi bokami w drugim trójkącie, to trzeci bok pierwszego trójkąta będzie większy od trzeciego boku drugiego trójkąta. [Patrz Leg. I. 10].

XXV. Odwrotnie, jeżeli dwa boki jednego trójkąta są równe dwóm bokom drugiego trójkąta i bok trzeci pierwszego jest większy od boku trzeciego w drugim, to i kąt, zawarty pomiędzy dwoma pierwszemi bokami w pierwszym, będzie większy od kąta, zawartego pomiędzy odpowiedniemi bokami w drugim. [Patrz Leg. I, 10, Scholion].

XXVI. Dwa trójkąty są równe, jeżeli mają po dwa kąty odpowiednio równe i po boku, zawartym pomiędzy kątami równemi, odpowiednio równym. [Niechaj ABC, DEF będą dwa trójkąty, w których $AB = DE$, kąty $A = D$, $B = E$ lub $C = F$. Gdyby było $AC > DF$, to odłożywszy $AG = DF$ na boku AC i poprowadziwszy GB, otrzymalibyśmy trójkąt $AGB =$ trójkątowi DEF. Stąd byłby kąt $E =$ kątowi $GBA < ABC$, co jest niedorzecznością, jeżeli $E = B$; lub byłby kąt $F =$kątowi $AGB > ACB$, co jest niedorzecznością, jeżeli przyjmiemy, że kąt $F = C$].

VI.

Twierdzenia wspólne geometryi euklidesowej i geometryi Łobaczewskiego [1]).

XXVII. Jeżeli prosta (nieriemannowska) tworzy z dwiema innemi prostemi (również nieriemannowskiemi) AB, CD kąty naprzemianległe

[1]) Te twierdzenia z wyjątkiem XXIX-go, które przejmujemy od Euk desa, są niezależne od postulatu 5-go, lecz opierają się w istocie rzeczy na postulacie 6-ym.

wewnętrzne równe *AEF*, *EFD* to te dwie proste nie spotykają się (Euklides I, 27). [Gdyż gdyby te dwie proste spotykały się po stronie punktów *B* i *D*, w punkcie, dajmy na to, *G*, mielibyśmy kąt *AEF* zewnętrzny dla trójkąta *EFG*, równy kątowi zewnętrznemu *EFG* lub *EFD*, co jest niedorzecznem według XVI. Podobnież proste nie mogą spotkać się po drugiej stronie, w punkcie jakimś *H* po za punktami *A* i *C*].

Wniosek. Dwie proste nie spotykają się także, gdy i kąty naprzemianległe zewnętrzne lub kąty odpowiadające (jeden zewnętrzny i drugi zewnętrzny po tej samej stronie poprzecznej) są równe, lub gdy suma dwóch kątów wewnętrznych lub zewnętrznych po jednej stronie jest równa dwóm prostym [Euklides I, 28].

XXVIII. Pierwsze twierdzenie Legendre'a. W trójkącie (nieriemannowskim) suma trzech kątów nie może być większa od dwóch kątów prostych.

Dowodzenie pierwsze (Legendre, Géométrie. Wyd. 3-e. Paryż. Didot 1800, księga I, tw. 19).

„Niechaj będzie, jeżeli to możliwe (Fig. 2), trójkąt *ABC*, w którym suma trzech kątów jest większa od dwu kątów prostych.

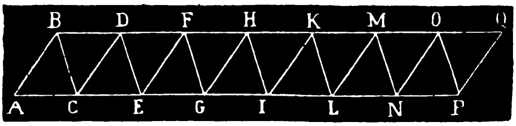

Fig. 2.

Przedłużmy *AC*, na przedłużeniu weźmy *CE* = *AC*, uczyńmy kąt *ECD* = *CAB*, bok *CD* = *AB*, poprowadźmy *DE* i *BD*. Trójkąt *CDE* będzie równy trójkątowi *BAC*, ponieważ oba mają po kącie równym, zawartym pomiędzy bokami odpowiednio równemi (tw. IV); będzie zatem kąt *CED* = *ACB*, kąt *CDE* = *ABC* i bok trzeci *ED* równy bokowi trzeciemu *BC*.

Ponieważ linia *ACE* jest prostą, to suma kątów *ACB*, *BCD*, *DCE* jest równa dwóm kątom prostym; ponieważ zaś zakładamy, że suma kątów trójkąta ABC jest większa od dwu kątów prostych, będzie zatem:

$$CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD,$$

a odejmując od stron obu tej nierówności wyraz wspólny im ACB oraz $CAB = ECD$, znajdziemy $ABC > BCD$. Ponieważ zaś boki AB, BC trójkąta ABC są równe odpowiednio bokom CD, CB trójkąta BCD, więc wynika stąd, że bok ~~kąt~~ trzeci AC jest większy od boku trzeciego BD (tw. XXIV).

Wyobraźmy sobie linię AC nieograniczenie przedłużoną oraz szereg trójkątów równych i podobnie umieszczonych: ABC, CDE, EFG, GHI i t. d.; jeżeli przez wierzchołki ich sąsiednie poprowadzimy proste BD, DF, FH, HK i t. d., utworzymy równocześnie szereg trójkątów pośrednich BCD, DEF, FGH i t. d., które będą wszystkie równemi sobie, gdyż będą miały po kącie równym, zawartym pomiędzy bokami odpowiednio równemi. Będzie tedy $BD = DF = FH = HK$ i t. d.

To mając, oznaczmy różnicę dwu prostych AC i BD, z których pierwsza ma być większa od drugiej, przez d; to wtedy jest jasnem, że $2d$ będzie różnicą pomiędzy prostą ACE, równą $2AC$, a linią prostą lub łamaną BDF, równą $2BD$; będzie tym sposobem $AE - BF = 2d$. Podobnież będzie $AG - BH = 3d$, $AI - BK = 4d$ i td. Otóż, chociażby różnica d była dowolnie małą, jest widocznem, że będąc powtórzona dostateczną liczbę razy, stanie się większą od długości dowolnie danej. Można będzie zatem przypuścić, że szereg trójkątów rozciąga się tak daleko, że jest $AP - BQ > 2AB$, a wtedy byłoby $AP > BQ + 2AB$. Lecz z drugiej strony linia AP, jako prosta, jest krótsza od linii łamanej $ABPQ$, łączącej końce A i P, tak że będzie zawsze $AP < AB + BQ + QP$ lub $AP < BQ + 2AB$. Tak więc założenie, z któregośmy wyszli, doprowadziło do sprzeczności; a stąd wynika, że suma kątów trójkąta ABC nie może być większa od dwu kątów prostych".

D o w o d z e n i e d r u g i e [1]. Załóżmy, że suma kątów trójkąta ABC (Fig. 1, tw. XVI) jest większa od dwu kątów prostych,

[1] To drugie dowodzenie, które także zawdzięczamy L e g e n d r e'owi, znajduje się w księdze (tw. 19 jego „Geometryi", lecz tylko w wydaniu 12-em (1823) z nieznacznym błędem, który poprawił Ł o b a c z e w s[illegible] 19 swo-

naprzykład o kąt α. Niechaj *BC* będzie najmniejszym bokiem trójkąta *ABC*. Łatwo widzieć, że suma kątów trójkąta *ABF* równa się sumie kątów trójkąta *ABC*. Nadto, najmniejszy bok *BAC* trójkąta *ABC* równa się sumie kątów $AFB + BAF$ trójkąta *ABF*. Mniejszy z tych dwu kątów *AFB*, *BAF*, jeżeli są nierównemi, jest mniejszy od $\frac{1}{2}$ *BAC*, a jeżeli są równemi, to każdy z nich równa się $\frac{1}{2}$ *BAC*. Postępując z trójkątem *ABF* tak samo jak z trójkątem *ABC*, wyprowadzimy z niego inny trójkąt, którego kąt najmniejszy jest co najwyżej równy połowie mniejszego z kątów *AFB*, *BAF*, a więc równy co najwyżej $\frac{1}{4}$ *BAC*. Postępując w ten sposób dalej, doszlibyśmy do trójkąta, w którym suma kątów byłaby zawsze równa sumie kątów trójkąta *ABC*, t. j. równałaby się dwóm kątom prostym więcej α. Lecz równocześnie mielibyśmy w tym trójkącie dwa kąty, których suma byłaby dowolnie małym ułamkiem kąta *BAC*, a więc byłaby mniejszą od α; oraz trzeci kąt, mniejszy od dwu prostych. W tym trójkącie zatem suma kątów byłaby równocześnie: 1-o równa 2 kąt. prost. $+ \alpha$; 2-o mniejsza niż 2 kąt. prost. powiększone o kąt mniejszy od α, doszlibyśmy tedy do sprzeczności. Wynika stąd, iż nie można przyjąć, że w trójkącie nieriemannowskim suma kątów jest większa od dwu kątów prostych. Tym sposobem twierdzenie zostało udowodnione.

XXIX. Drugie twierdzenie Legendre'a. Jeżeli w jednym trójkącie suma trzech kątów jest równa dwóm kątom prostym, to będzie też równą dwóm kątom prostym w każdym innym trójkącie.

„Załóżmy, że w trójkącie *ABC* (Fig. 3) suma trzech kątów jest równa dwóm kątom prostym, dwa tedy z tych trzech kątów, — niechaj niemi będą *A* i *C*,—muszą być ostre [1]). Z wierzchołka *B* trzeciego

---

jej pracy: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie des Parallellinien' (Dzieła str. 557). Dowodzenie to opiera się na tej samej konstrukcyi, co wyżej podane twierdzenie XVI Euklidesa.

[1]) Dajemy dosłowne dowodzenie Łobaczewskiego (Geom. Untersuchungen i t. d. Nr. 20. Dzieła str. 558); nie jest ono może dostatecznie rozwinięte, lecz czytelnik może je sobie dopełnić tam, gdzie jest zbyt zwięzłem. Legendre dał inne dowodzenie dłuższe.

kąta poprowadźmy prostopadłą p do boku przeciwległego AC. Ta prostopadła podzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty prostokątne; w każdym z nich suma kątów powinna być też równa dwu kątom prostym, gdyż inaczej byłaby ona w jednym z nich większą od dwu prostych, a więc w trójkącie całkowitym mniejszą od dwu prostych. Otrzymamy tym sposobem trójkąt prostokątny, w którym ramionami kąta prostego będą p i q; przy pomocy niego będzie można utworzyć czworobok o bokach przeciwległych równych (tw. XXII) i o bokach przyległych p i q, wzajemnie prostopadłych. Powtarzając tę konstrukcyę, będzie można utworzyć inny czworobok,

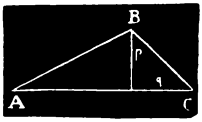

Fig. 3.

którego bokami będą np i q i nakoniec czworobok $ABCD$ (Fig 4), mający boki wzajemnie prostopadłe i w którym $AB = mq$, $BC = np$, $DC = mq$, $AD = np$. gdzie m i n są jakiekolwiek liczby całkowite. Ten ostatni czworobok za pomocą przekątnej AC podzieli się na dwa trójkąty prostokątne równe ABC, ADC; w każdym z tych trójkątów suma trzech kątów będzie równa dwóm kątom prostym. Otóż można wziąć za m i n liczby dostateczne wielkie tak, aby trójkąt prostokątny ABC w którym ramiona kąta prostego są $AB = mq$, $BC = nq$, zawierał w swem wnętrzu każdy dany inny trójkąt prostokątny FBE, gdy uczynimy tak, aby kąty proste obu trójkątów przypadły na siebie. Prowadząc linię EC, otrzymujemy trójkąty prostokątne, mające z poprzedzającym po boku wspólnym. Trójkąt ABC

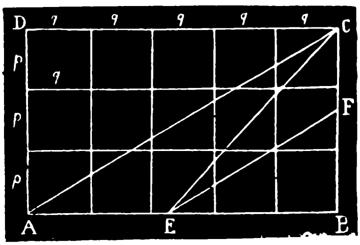

Fig 4.

jest utworzony przez połączenie dwu trójkątów ACE, ECB; w każdym z nich suma trzech kątów nie może być większa od dwu kątów prostych; powinna ona być zatem w każdym z nich równą dwóm prostym, gdyż inaczej nie byłaby równa dwóm prostym w trójkącie całkowitym. Podobnież trójkąt ECB składa się z dwu trójkątów ECF, FEB, skąd wynika, że w trójkącie FEB suma trzech kątów powinna być równa dwóm kątom prostym. To powinno zachodzić ogólnie dla jakiegokolwiek trójkąta, gdyż każdy trójkąt może być rozłożony na dwa trójkąty prostokątne".

Wniosek. W geometryi nieriemannowskiej możliwe są tylko dwie hypotezy: suma trzech kątów jest równa dwóm kątom prostym we wszystkich trójkątach, albo jest mniejsza od dwóch kątów prostych we wszystkich trójkątach.

VII.

Twierdzenia charakterystyczne geometryi euklidesowej i geometryi Łobaczewskiego [1]).

XXX. Jeżeli postulat piąty jest prawdziwy, to dwie proste nie spotykające się tworzą z poprzeczną kąty wewnętrzne, których suma jest równa dwóm kątom prostym (Euklides I, 29).

Gdy bowiem ta suma nie jest równa dwóm kątom prostym, wtedy jest większa od dwu kątów prostych po jednej stronie poprzecznej, mniejsza są zaś od dwu kątów prostych po stronie drugiej, albowiem według twierdzenia XIII, suma czterech kątów wewnętrznych jest równa czterem kątom prostym. Lecz według postulatu piątego proste dane powinny się spotkać po stronie poprzecznej, po której ta suma jest mniejszą od dwu kątów prostych, a to sprzeciwia się założeniu. A więc i t. d.

Uwaga. W geometryi euklidesowej proste nie spotykające się nazywamy równoległemi.

Wniosek. Dwie równoległe tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne równe, kąty naprzemianległe zewnętrzne równe, kąty odpowiadające (t. j. położone po jednej stronie, jeden wewnętrzny, drugi zewnętrzny) równe.

XXXI. Jeżeli BD jest przedłużeniem boku AB (fig. 5) trójkąta ABC, to kąt zewnętrzny CBD równa się sumie dwu kątów wewnętrznych nie przyległych mu

---

[1]) W tym paragrafie i następnym przyjmujemy postulat 6-y Euklidesa.

ACB, *BAC*; suma zaś trzech kątów wewnętrznych trójkątów jest równa dwóm kątom prostym, jeżeli postulat piąty jest prawdziwy. (Euklides I, 31—32).

Utwórzmy kąt *CBF* równy kątowi *ACB* (tw. XYIII); prosta *BF* będzie równoległa do prostej *AC* (tw. XXVII), a stąd (tw. XXX, wniosek) kąt *FBD* będzie równy kątowi *CAB*. A więc kąt *CBD*, równy *CBF*+*FBD*, będzie równy sumie dwu kątów wewnętrznych *ACB*, *CAB*. Stąd *ABC* + *CBD* równa się sumie trzech kątów wewnętrznych *ABC*, *ACB*, *CAB*.

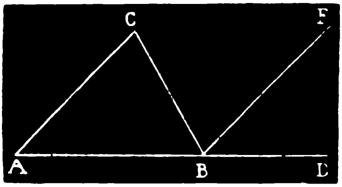

Fig. 5.

Wniosek. Jeżeli postulat piąty jest prawdziwy, suma kątów w czworoboku równa się czterem kątom prostym.

XXXII. Odwrotnie, jeżeli suma kątów w każdym trójkącie jest równa dwóm kątom prostym, to postulat piąty jest prawdziwy, t. j. dwie proste *AB*, *CD*, tworzące z trzecią prostą *EF* po jednej stronie poprzecznej dwa kąty wewnętrzne, których suma jest równa dwóm kątom prostym, będąc przedłużone dostatecznie, przecinają się po tej stronie (Legendre, wyd. 12-e. I. 23).

„Niechaj suma *BEF*+*EFD* (Fig. 6) będzie mniejsza od dwu kątów prostych; poprowadźmy prostą *FG* w ten sposób, aby kąt

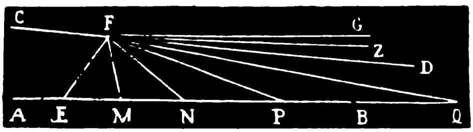

Fig. 6.

EFG=*AEF*; otrzymamy wtedy sumę *BEF*+*EFG*=*BEF*+*AEF* t. j. równą dwóm kątom prostym, a ponieważ suma *BEF*+*EFD* jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przeto prosta *DF* zawarta będzie wewnątrz kąta *EFG*.

Przez punkt *F* poprowadźmy pochyłą *FM*, spotykającą prostą *AB* w punkcie *M*; kąt *ABF* będzie równy *GFM*, gdyż dodając po jednej i drugiej stronie po $EFM+FŁM$, otrzymujemy po każdej stronie dwa kąty proste. Bierzemy $MN=FM$ i prowadzimy *FN*; kąt *AMF* zewnętrzny dla trójkąta *FMN* równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych *MFN*; *MNF* (tw. XXXI); te zaś kąty są równe, ponieważ leżą naprzeciwko boków równych *MN*, *FM*; a zatem kąt *AMF* lub równy mu *MFG* jest dwa razy większy od kąta *MFN*. Prostą więc *FN* dzieli na dwie równe części kąt *GFN* i spotyka linię *AB* w punkcie *N*, położonym w odległości $MN=FM$.

Tymże sposobem dowieść można, że gdy weźmiemy $NP=FN$, wyznaczymy na prostej *AB* punkt *F*, w którym kończy się prosta *FP*, tworząca kąt *GFP*, równy połowie kąta *GFN* lub czwartej części kąta *GFM*.

Można więc kolejno brać połowę, część czwartą, ósmą i t. d. kąta *GFM*; proste zaś, za pomocą których uskutecznia się to dzielenie, spotykać będą prostą *AB* w punktach coraz bardziej odległych, lecz łatwych do wyznaczenia, gdyż $MN=FM$, $NP=FN$, $PQ=FP$ i t. d.

Lecz prowadząc to kolejne dzielenie kąta *GFM*, dojdziemy do kąta *GFZ* mniejszego niż kąt dany *GFD*, i pozostanie prawdą to, że prosta *FZ* przedłużona spotyka prostą *AB* w punkcie oznaczonym; tem bardziej więc prosta *FD*, zawarta w kącie *EFZ*, spotyka prostą *AB*".

W n i o s e k I. W geometryi euklidesowej, t. j. przy przyjęciu postulatów 5-go i 6-go, suma trzech kątów trójkąta jest równa dwóm kątom prostym.

W n i o s e k II. W geometryi Ł o b a c z e w s k i e'g o, t. j. gdy odrzucamy postulat 5-y i przyjmujemy 6-y, suma trzech kątów trójkąta jest zawsze mniejsza od dwóch kątów prostych; suma kątów czworoboku jest mniejsza od czterech kątów prostych.

Gdyż nie może być większą (twier. XXVIII); gdyby zaś była równa dwóm prostym w jednym trójkącie, byłaby takąż we wszystkich (tw. XXXI) i wtedy (tw. XXXII) postulat piąty bylby prawdziwy, co sprzeciwia się określeniu geometryi Łobaczewskiego.

Uwaga. Zbierając powyższe fakty, powiemy, że suma kątów trójkąta jest równa dwóm bokom prostym w geometryi euklidesowej, mniejsza od dwu prostych—w geometryi Łobaczewskiego. Zobaczymy, że w geometryi riemannowskiej jest większą od dwóch kątów prostych.

(Dokończenie nastąpi).

J. BERTRAND O WROŃSKIM.

W zeszycie czasopisma „Revue des deux mondes“ z dnia 1 lutego r. b., znakomity geometra francuski J. Bertrand, sekretarz dożywotni Akademii Nauk w Paryżu, poświęca artykuł [1]) matematykowi polskiemu Hoene-Wrońskiemu. O tym artykule, który sprawił sensacyę w szerszych kołach, pozwolimy sobie wypowiedzieć słów kilka.

Rozpoczyna Bertrand studyum swoje od pytania, czy Wroński był obłąkanym, szarlatanem, czy geniuszem, i w konkluzyi dochodzi wniosku, że był obłąkanym; geniusz jego zatruty był obłędem, który wyjaśnia nam szarlatanizm i pozwala przebaczyć szalbierstwa [2]).

Dla okazania swej tezy, Bertrand przedstawia nam wypadki życia Wrońskiego, jego nieuzasadnione pretensye naukowe,

[1]) Hoêné Wroński. Str. 588—609.

[2]) Oto dosłowne brzmienie konkluzyi: „Wronski était-il un charlatan, un fou ou un homme de génie? J'oserais sans hésitation le déclarer fou; c'est l'interprétation la plus favorable de ses actes et des écrits. La folie chez lui explique le charlatanisme, fait pardonner l'imposture, et permet de croire au génie empoisonné par elle“.