W. SIERPIŃSKI.

O pewnem twierdzeniu Cantora.

Powszechnie panuje przekonanie, jakoby dla wyznaczenia położenia punktu na płaszczyźnie konieczne były aż dwie liczby rzeczywiste (dwie spółrzędne). Twierdzenia podobnego nigdzie się wprawdzie nie dowodzi, lecz już przez to, iż w Geometryi używamy zawsze dwóch spółrzędnych dla określania położenia punktów płaszczyzny, zaś w Analizie zasadniczo odróżniamy funkcye jednej od funkcyj dwóch i więcej zmiennych, przeświadczenie o istnieniu takiego twierdzenia jest aż nadto wytłómaczone. Przeświadczenie to jest jednak błędne; dla określania punktów płaszczyzny możnaby również dobrze posługiwać sie **jedną tylko** liczbą rzeczywistą; wynika to z pewnego twierdzenia G. **Cantora**, ogłoszonego przez niego w roku 1878. [1]

Jakkolwiek praktycznie sposób określania położenia punktów płaszczyzny za pomocą jednej liczby rzeczywistej byłby niedogodny, to jednak teoretyczne znaczenie możności takiego określania jest niezaprzeczone Jednym z bezpośrednich stąd wniosków jest ten, iż, wyrażając się językiem potocznym, tyleż mamy punktów na całej płaszczyźnie, ile na linii prostej (albo nawet jakimkolwiek jej odcinku). Jest to bezspornie jeden z najciekawszych, chociaż mniej znanych, paradoksów matematycznych. Z drugiej zaś strony z twierdzenia **Cantora** wnioskujemy, iż niema zasadniczej różnicy pomiędzy funkcyami jednej i więcej zmiennych, jeżeli pojęcie funkcyi uważać będziemy w całej jego ogólności (a więc bez zastrzeżeń o ciągłości i t. p.).

---

[1]) G. Cantor. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journ. f. r. u. a M. Band 84. Zob. też: Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898 str. 18, oraz: Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, str. 32 (Jahresber. der Deutschen-Mathematiker-Vereinigung Band 8, Heft 2).

Wobec całego interesu, jaki przedstawia twierdzenie C a n t o r a, dziwnem się wydaje, iż jest ono tak mało znane wśród szerszego ogółu matematyków. Przyczyny tego szukać należy w tem, iż twierdzenie zostało wykryte stosunkowo niedawno (przed 30-tu niespełna laty) i nie zdążyło jeszcze przejść do podręczników, a może i w tem jeszcze, że pierwotny dowód C a n t o r a jest nieco przydługi (z niezbędnemi wiadomościami pomocniczemi zajmuje kilkanaście stronic). Poniżej podajemy zmodyfikowany przez nas dowód twierdzenia C a n t o r a, nie mniej ścisły, choć znacznie krótszy od pierwotnego; przewodnia myśl dowodu jest u nas ta sama co u C a n t o r'a.

Uważajmy jakąkolwiek liczbę rzeczywistą x. Wyznaczmy najbliższą liczbę całkowitą a_0, większą od x. Różnica $a_0—x$ będzie liczbą dodatnią, nie większą od jedności. Możemy więc założyć:

$$x = a_0 - \frac{1}{x_1},$$

oznaczając przez x_1 liczbę nie mniejszą od jedności.

Wyznaczmy najbliższą liczbę całkowitą a_1, większą od x_1; a_1 będzie $\geqslant 2$ i można będzie założyć:

$$x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2},$$

oznaczając przez x_2 liczbę $\geqslant 1$. Postępując w ten sam sposób, dalej, otrzymamy nieskończony ciąg równań:

$$x = a_0 - \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = a_2 - \frac{1}{x_3}, \ldots\ldots,$$

skąd znajdziemy oznaczone w zupełności rozwinięcie liczby x na ułamek ciągły nieskończony:

$$x = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \ldots}}} \ldots,$$

gdzie wszystkie a_n są liczbami całkowitemi i przytem, poczynając od a_1 nie mniejszemi od 2.

Przykłady.

1) Załóżmy $x = \frac{3}{5}$. Mamy:

$$\frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5}, \quad \frac{5}{2} = 3 - \frac{1}{2}, \quad 2 = 3 - \frac{1}{1}, \quad 1 = 2 - \frac{1}{1},$$

$$\frac{3}{5} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \ldots}}}} \ldots,$$

a więc: $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 3$, zaś $a_n = 2$ dla $n > 2$.

2) Niech będzie $x = \sqrt{2}$. Mamy:

$$\sqrt{2} = 2 - \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{1}{x_2}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{2},$$

skąd znajdziemy:

$$\sqrt{2} = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{4 - \ldots}}}} \ldots$$

czyli: $a_0 = 2$, zaś dla $n > 0$: $a_{2n-1} = 2$ oraz $a_{2n} = 4$.

Każda więc liczba rzeczywista rozwija się w oznaczony w zupełności sposób na ułamek ciągły nieskończony postaci:

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ldots}} \ldots,$$

gdzie wszystkie a_n są liczbami całkowitemi i przytem dla $n > 0$ nie mniejszemi od 2. Z drugiej strony możnaby udowodnić, że dla każdego takiego ułamka zawsze istnieje i przytem jedna tylko liczba rzeczywista, dająca uważane rozwinięcie [1].

Uważajmy teraz jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, nieujemną x, dającą rozwinięcie:

$$x = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \dots}}$$

Będziemy tu mieli oczywiście $a_0 \geqslant 1$.

Załóżmy:

$$a_0 = 1 + \alpha_0, \quad a_n = 2 + \alpha_n \quad \text{dla } n > 0;$$

wszystkie α_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) będą więc oznaczonemi liczbami całkowitemi $\geqslant 0$.

---

[1]) Dla dowodu należałoby wyjść z łatwo wyprowadzić się dającej tożsamości:

$$a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \dots - \cfrac{1}{a_n}}} = a_0 - \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} - \dots - \frac{1}{Q_{n-1} Q_n},$$

gdzie przez Q oznaczamy mianowniki kolejnych reduktów, a więc:

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = a_1, \quad \text{zaś dla } n > 1\text{:} \quad Q_n = Q_{n-1} a_n - Q_{n-2}.$$

Można z łatwością okazać, iż (jeżeli $a_n \geqslant 2$ dla $n > 0$) liczby Q_n wzrastają wraz ze wskaźnikiem, a stąd, przyjąwszy pod uwagę, iż są to liczby całkowite, wywnioskować, iż $Q_n \geqslant n + 1$. Składniki szeregu $\frac{1}{Q_0 Q_1} + \frac{1}{Q_1 Q_2} + \dots$ są więc wszystkie dodatnie i niewiększe odpowiednio od składników szeregu zbieżnego $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots = 1$. Wnosimy stąd o zbieżności ułamka $a_1 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \dots}}$. Oznaczając przez x granicę ciągu jego reduktów, możnaby już z łatwością okazać, że x rozwija się na ułamek ciągły $x = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \dots}}$.

Dowód wreszcie, że żadna inna liczba rzeczywista nie daje tego samego rozwinięcia, nie przedstawia żadnej trudności.

Każda liczba $x \geqslant 0$ wyznacza zatem pewien określony w zupełności ciąg nieskończony

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots$$

o wyrazach całkowitych, nie ujemnych. Ale możemy powiedzieć, że i odwrotnie, każdemu takiemu ciągowi odpowiada oznaczona liczba nieujemna:

$$x = 1 + a_0 - \cfrac{1}{2 + a_1 - \cfrac{1}{2 + a_2 - \ldots}}$$

Będziemy pisali:

$$x = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots).$$

Pomiędzy zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych $\geqslant 0$ oraz zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach całkowitych, nie ujemnych, istnieje więc tego rodzaju odpowiedniość, iż każdemu elementowi pierwszego zbioru odpowiada oznaczony element drugiego, i naodwrót. Mówimy, że uważane zbiory są r ó w n e j m o c y; wyrażając się mniej ściśle, moglibyśmy powiedzieć, że są j e d n a k o w o l i c z n e.

Uważajmy teraz dwie liczby rzeczywiste nieujemne:

$$x = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)$$

oraz

$$y = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots).$$

Liczby te wyznaczają określoną w zupełności trzecią (również $\geqslant 0$):

$$z = (a_0, \beta_0, a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \ldots\ldots),$$

gdyż po prawej stronie mamy oznaczony ciąg nieskończony o wyrazach całkowitych, nieujemnych.

Ale i odwrotnie: znając liczbę nieujemną:

$$z = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots),$$

będziemy znali liczby x i y, wystarczy bowiem założyć:

$$x = (\gamma_0, \gamma_2, \gamma_4, \ldots\ldots) \text{ oraz } y = (\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \ldots\ldots).$$

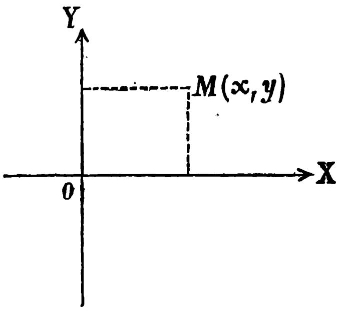
P r z y k ł a d y:

Liczby $x = 2 = (2, 0, 0, 0, \ldots)$ oraz $y = \frac{2}{3} = (0, 2, 0, 0, \ldots)$ wyznaczają liczbę $z = (2, 0, 0, 2, 0, \ldots) = 2\frac{2}{7}$ i naodwrót.

Liczba $z = \sqrt{2} = (1,0,2,0,2,0,\ldots)$ wyznacza liczby $x = (1.2,2,\ldots) = \sqrt{3}$ oraz $y = (0, 0, 0, \ldots) = 0$ i odwrotnie.

Możemy więc powiedzieć, że zbiór wszystkich układów x, y dwóch liczb rzeczywistych $\geqslant 0$ oraz zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, nie ujemnych z są równej mocy.

Uważajmy teraz jakikolwiek punkt M, leżący wewnątrz kąta XOY płaszczyzny lub na którymkolwiek z jego boków. Oznaczmy przez x, y spółrzędne kartezyańskie uważanego punktu: będą to pewne



liczby nieujemne. Oznaczmy dalej przez z liczbę nieujemną, odpowiadającą układowi (x, y). Każdemu punktowi M uważanej ćwiartki płaszczyzny odpowiada oznaczona liczba nie odjemna z, i odwrotnie. Odpowiedniość pomiędzy wszystkiemi punktami ćwiartki płaszczyzny oraz wszystkiemi liczbami rzeczywistemi nieujemnemi jest więc wzajemna i zupełna. Stąd twierdzenie:

P o ł o ż e n i e k a ż d e g o p u n k t u ć w i a r t k i XOY p ł a s z c z y z n y m o ż e b y ć w y z n a c z o n e w z u p e ł n o ś c i p r z y p o m o c y j e d n e j l i c z b y r z e c z y w i s t e j.

Możnaby stąd wyprowadzić dalej wnioski, odnoszące się do całej płaszczyzny, lecz rozumowanie, któreby w tym celu należało przeprowadzić, byłoby czysto formalne; istota twierdzenia C a n t o r a zawiera się już w wyniku, który otrzymaliśmy przed chwilą.

Przyjęta przez nas odpowiedniość pomiędzy punktami M i liczbami z posiada różne ciekawe własności; wspomnimy tu tylko, iż jeżeli spółrzędne x i y punktu M są obie liczbami wymiernemi, to wymierną będzie liczba z i naodwrót [1].

Dodamy wreszcie, że rozważania nasze możnaby z łatwością uogólnić dla przestrzeni, a nawet dla przestrzeni n-wymiarowej.

---

[1]) Wynika to stąd, iż dla liczb wymiernych $w = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ wszystkie α_n, poczynając od pewnego n, muszą być zerami i odwrotnie.