

L. ZARZECKI.

## PEWNIK I POSTULAT.

---

„Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden“. Tak zaczyna Dedekind przedmowę do swego traktatu: „Was sind und was sollen die Zahlen.“ Jednakże często spotykamy w podręcznikach Geometrii zdanie, że „pewnik jest prawdą, która nie wymaga dowodzenia.“ Zdanie to przeczy temu duchowi krytycznemu, który stanowi siłę główną każdej nauki, nie zgodne jest z historią, gdyż Euklides jeszcze nieco ściślej starał się określać zasadnicze prawdy Geometrii.

W starszych wydaniach Elementów Euklidesa, jak wiadomo, znajdujemy wyraźnie wypowiedzianych 12 pewników (*κωινὰ ἔνωταί*) i 3 postulaty (*αἰτήματα*)<sup>1)</sup>. Te ostatnie umieszczone są przed pewnikami i wypowiadają prawdy natury czysto geometrycznej. Śród pewników 9 pierwszych mają treść ogólno-matematyczną, a 3 ostatnie geometryczną i dlatego zaliczane bywają często do postulatów (czyli „żądań“ w łom. C z e c h a). Przytaczamy tu te pewniki i postulaty, przyczem nadajemy tym ostatnim redakcyę, której użył prof. Dickstein w II tomie tłumaczenia swego „Repertoryum matematyki wyższej“ Pascala.

*Postulaty:* I. Dwa punkty dane można zawsze połączyć prostą.

II. Linię prostą można przedłużyć.

III. Mając dany środek jakikolwiek i dany promień, możemy zawsze nakreślić koło.

---

<sup>1)</sup> Józef Czech. Euklidesa początków geometrii xiąg ośmiuro. Wilno, 1807 r.

- Pewniki:*
- I. Wielkości równe tejże samej wielkości są równe i między sobą.
  - II. Jeśli do równych wielkości dodane będą wielkości równe, całe wielkości będą równe.
  - III. Jeżeli od równych wielkości odjęte będą równe wielkości, pozostałe wielkości będą równe.
  - IV. Jeśli do nierównych wielkości dodane będą wielkości równe, całe wielkości będą nierówne.
  - V. Jeżeli od nierównych wielkości odjęte będą wielkości równe, pozostałe wielkości będą nierówne.
  - VI. Wielkości, które są podwójnemi tejże samej wielkości, są między sobą równe.
  - VII. Wielkości, które są połowami tejże samej wielkości są między sobą równe.
  - VIII. Wielkości, które przystają do siebie wzajemnie, są między sobą równe.
  - IX. Całość większa jest od swojej części.
  - X. Dwie proste nie zamykają sobą przestrzeni skończonej<sup>2)</sup>.
  - XI. Wszystkie kąty proste są równe<sup>2)</sup>.
  - XII. Jeżeli kąty wewnętrzne, utworzone po jednej stronie przez prostą z dwiema innymi przecinającemi ją prostymi, są takie, że suma ich jest mniejsza od dwóch kątów prostych; wtedy te dwie proste przedłużone spotykają się po tejże stronie<sup>2)</sup>.

---

<sup>2)</sup> S. Dickstein. Repertoryum Matematyki wyższej prof. E. Pascala t. II, Warszawa, 1901, str. 692—693.

Jeżeli te trzy ostatnie pewniki zaliczyć do postulatów, otrzymamy tych ostatnich sześć. Porównywając treść postulatów i pewników, najpierw spostrzegamy to, że postulaty wyrażają, jak wyżej zaznaczono, prawdy geometryczne, a pewniki—ogólno-matematyczne. W nowszych więcej krytycznie opracowanych wydaniach<sup>1)</sup> (np. w wydaniu Heiberga) Elementów Euklidesa podział ten na dwie grupy 6 i 9 jest właśnie uskuteczniiony, przyczem pewnik ostatni umieszcza się zwykle na miejscu piątym wśród postulatów. Tym sposobem wyraźniejszym się staje, dla czego Euklides różnego rodzaju prawdy podzielił na *κοινὰ ἔννοια* (notitiae communes) czyli pewniki, i *ἀιτήματα* czyli postulaty. Ciekawym i rzucającym, zdaniem naszym, nieco więcej światła na tę sprawę jest fakt, o którym nie wiemy, czy był uwzględniony przez historyków Matematyki, bo np. w obszernym dziele Cantora<sup>2)</sup> nie udało się nam tego znaleźć, że spółcześni Euklidesowi filozofowie greccy, należący do szkoły stoików, w swej teorii poznania używali na określenie pierwszych elementarnych wytworów abstrakcyi też tego samego słowa: *κοινὰ ἔννοια*. Rzuciło się to nam w oczy przy czytaniu artykułu D-ra W. Rubczyńskiego, znajdującego się w zeszycie IV „Przeglądu Filozoficznego“ z r. 1906, p. t. „Kryterium prawdy w teorii poznania pierwszych stoików i u Kartezjusza“. Nie uważamy oczywiście kwestyi związku tego za naukowo uzasadnioną. Do tego potrzeba głębszych studyów. Przytaczamy jednakże tu kilka cytat wziętych z „Historji filozofji greckiej“ Zeller a<sup>3)</sup>, które charakteryzują stanowisko teoryopoznawcze stoików, a zarazem Zenona z Citium, założyciela tej szkoły.

Na str. 208 pisze Zeller: „W przeciwstawieniu do Platona i Arystotelesa stoicy są zdecydowanymi empirykami. Jeżeli już Antisthenes uznawał za realne tylko oddzielne rzeczy, to Zenon wychodzi z tego punktu widzenia, że całe poznanie polega na zmysłowych spostrzeżeniach. Według nauki stoików, dusza ludzka przy narodze-

---

1) I. c. Wydania tego nie mamy pod ręką.

2) Cantor w 1-ym tomie swych „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“ używa słowa „Axiome“ tylko dwa razy, a „Postulat“ ani razu, chociaż widocznym jest (str. 210 t. I), że rozróżnia pojęcia „Grundsatz“ i „Axiome“

3) Dr. E. Zeller. Grundriss der Geschichte der griechischen Philosophie. Sechste Auflage. Leipzig, 1901, str. 208—209.

niu podobną jest do niezapisanej białej karty; każda treść przychodzi do niej od obiektów; przedstawienie (Vorstellung, φαντασία) jest, jak chce Zeno i Kleantes, odeiskiem (τόπωσις) rzeczy w duszy lub, jak chce Chrysyppus<sup>1)</sup>, pewną wywołaną przez nią w tej ostatniej przemianą (modyfikacją). Także co do wewnętrznych naszych stanów i czynności poucza nas (według Chrysyppusa) postrzeganie (Wahrnehmung); ponieważ i to ostatnie polegać powinno na materialnych procesach, nie potrzebnem było dla stoików rozróżnienie pomiędzy zewnętrznym i wewnętrznym postrzeganiem. Z postrzegań powstają wyrozumienia, a z tych ostatnich doświadczenie. Za pomocą wniosków z postrzeżonego przychodzimy do ogólnych przedstawień (ἐννοιαί). O ile takowe drogą naturalną i nie sztuczną z ogólnie znanych doświadczeń powstają, tworzą mianowicie te „wspólne przeświadczenia“ (κοιναι ἐννοιαί i notitiae communes), które poprzedzają wszelkie badania naukowe i dla tego nazwane były, zgodnie z Epikurem w tym sensie, jak się zdaje najpierw przez Chrysyppusa—Προλήψεις“.

Powyżej wzmiankowane 9 pewników Euklidesa odpowiadają temu charakterowi, gdyż zawierają sądy na każdym kroku w różnego rodzaju dziedzinach szeroko stosowane. „Na umiętynym sposobie dowodzenia—mówi dalej Zeller, charakteryzując stoików — i tworzeniu pojęć polega nauka, najglówniejszą zaletą której jest, że ona w przeciwstawieniu do mniemania (δῶξα) daje niewzruszone żadnymi zarzutami przekonanie albo system takich przekonań. Ponieważ wszelkie nasze przedstawienia (Vorstellungen) wyrastają z postrzegań, wartość ich poznawcza zależy od tego, czy istnieją takie przedstawienia, których zgodność z postrzeganiami przedmiotami jest zapewniona. To właśnie stwierdzają stoicy. Pewna część naszych przedstawień jest zależnie od tego tak utworzona, że zmuszają nas one do ich stwierdzenia, one są tak ze świadomością naszą złączone, że nie tylko z czegoś rzeczywistego powstać mogą, one mają rzeczywistość bezpośrednią; zgadzając się z nimi, ujmujemy sam przedmiot. Dla tego też w zgodzie z tak utworzonym przedstawieniem polega, według Zena, pojęcie (καταληψις, wyraz utworzony przez Zena), które przeto (w odróżnieniu od ἐννοιαί z. w.) ma tę samą zawartość co każde przedstawienie, ale

---

<sup>2)</sup> Jeden z późniejszych stoików.

odróżnia się od tegoż, dzięki uświadomieniu jego zgodności z obiektem i dzięki wypływającej stąd niezmienności. Takie przedstawienie, któremu towarzyszy podobna świadomość, nazywa Zenon *φαντασία καταληπτική* (begriffliche Vorstellung), t. j. takie, które zdolne jest ujmować swój przedmiot. C y c e r o wyjaśnia to słowami: „visum quod percipi potest“ i twierdzi, że takie visum jest kryterium prawdy“.

Widzimy tu, że wspomniane sześć postulatów można załączyć do grupy, którą charakteryzuje t. zw. *φαντασία καταληπτική*. Ta ostatnia może być nazwana w języku społecznym intuicyją. Zdaje nam się, że przez to nie zgrzeszymy zbyt, albo wcale, przeciw istotnemu stanowi rzeczy. Jeżeli się zgodzić z powyższem przedstawieniem kwestyi, należy uznać, że pewniki u Euklidesa są prawdami podstawowemi, które można stosować do wszystkiego, co do kategorii wielkości zaliczone być może, a więc i do Geometrii, a postulaty stanowią właściwą treść zasadniczych prawd czysto geometrycznej natury, prawd, które będąc jasne intuicyjnie, różnią się jednak od innych podobnych tem, że są wyeliminowane drogą analizy logicznej. To, że postulaty podzielone były na dwie części i jedna zaliczona do pewników, należy przypuścić, miało swój powód w tem, iż co do trzech ostatnich postulatów zachodziły wątpliwości, czy nie można ich dowieść, a ponieważ nie umiano tego zrobić (są jednakże pewne dane, które wskazują, że próby w tym kierunku, np. co do postulatu V były czynione), zaliczono do pewników, odwołując się do uznania ogólnego. Jeszcze P l a t o n wskazywał na to, że prawdy podstawowe Geometrii mogą być dwóch rodzaj: albo takie, które są oczywiste same przez się, albo takie, które dotąd nie mogły być dowiedzione <sup>1)</sup>.

P r o c l u s, jak wiadomo, zastąpił słowo „pewnik“ w znaczeniu *καὶ εἴδησις*, słowem *ἀξιόματα*, które u stoików było wyrazem sądów, twierdzeń, które mogą być albo prawdziwe, albo fałszywe <sup>2)</sup>. Widzimy tu przy tej zmianie słownej jeszcze dalszy rozwój krytycyzmu w zapatrywaniu się na pewniki. Euklides bowiem uważał je za prawdy, nie wzbudzające żadnych wątpliwości. Rozwój nauki w końcu 18-go i początku 19-go wieku doprowadził G a u s s a, Ł o b a c z e w-

---

<sup>1)</sup> Cantor. T. I, str 209 i 210,

<sup>2)</sup> Zeller. I. c. str. 211.

skiego i Bolyaia, niezależnie od siebie, do uznania możliwości nowych systematów Geometrii i nawet wytworzenia jednego z nich. Teraz wiemy, dzięki pracom Hilberta, że takich systematów może być wiele. Zdaniem naszym, ma pewną część racji Hölder <sup>1)</sup>, twierdząc, że przez „pewnik“ należy rozumieć zupełnie pewne założenie, postulat zaś wyraża prawdę w gruncie rzeczy przez nas samych świadomie wymaganą. Wybór nazwy słownej odpowiedniej danemu pojęciu jest w zupełności od nas zależny; może być tylko kwestya, czy istnieją w nauce różne pojęcia, odpowiadające różnym słowom, i czy takie odróżnienie jest potrzebne. Euklides, jak widzieliśmy, rozróżnienie swoje opiera z jednej strony na wyluszczonej powyżej treści wypowiedzianych prawd: pewniki są więcej ogólne, postulaty—specyalne; z drugiej—podkreśla właśnie to, o czem nadmienia Hölder. Postulaty są rezultatem analizy naukowej, rezultatem świadomym czynnej pracy myśli, pewniki zaś zdawkowemi i bezpośrednio jasnemi sądami.

Pytanie, poruszone tu, ma nietylko subtelne znaczenie logiczne. Jeżeli zwrócimy uwagę na literaturę podręcznikową, np. niemiecką i włoską, zauważymy, że Włosi używają przeważnie słowa „postulato“ Niemcy—„Axiome“, Francuzi w większości przypadków też tego ostatniego wyrazu się trzymają. Nie znaczy to, żeby Włosi nie znali lub nie używali wcale słowa „pewnik“, „aksiomat“. Prof. Veronese w przedmowie do swego kapitalnego dzieła „Fondamenti di Geometria“ mówi, że w Geometrii są prawdy, które powstają z bezpośredniego postrzegania przedmiotów, i takie nazywa pewnikami (assiomi); są znowu inne, które rozpatrują przedmioty wyobrażalne i nie mogą być ani sprawdzone dokładnie, ani obalone doświadczalnie. Takie nazywa postulatami, albo hipotezami. Ostatni ten termin, zdaje się, wprowadzony był nanowo przez Riemanna. Ten sam autor w swym podręczniku Geometrii już nie robi różnicy pomiędzy postulatem a pewnikiem<sup>3)</sup>,

---

<sup>1)</sup> O. Hölder. Anschauung und Denken in der Geometrie. Leipzig, 1900, str. 24 (4).

<sup>2)</sup> G. Veronese. Fondamenti di geometria. Padova, 1891, str. XII—XIII.

<sup>3)</sup> G. Veronese. Elementi di Geometria. Verona, 1901. Edizione II str. 4.

wszędzie dalej używa słowa „postulato“. F. Enriques<sup>1)</sup> w zbiorowym, zainicyowanym przez siebie dziele p. t. „Questioni riguardanti la Geometria elementare“ powiada, że pewnikami są prawdy, wyrażające prawa (legge) logiki dedukcyjnej, a w podręczniku swym Geometrii elementarnej wszędzie używa słowa „postulato“. Hilbert stale posługuje się słowem „Axiome“, Pasch — „Grundsatz“, Killing — „Axiome“ i „Grundsatz“. G. Peano w swej książce: „I principii di Geometria logicamente esposti“, Torino, 1882 r., używa tylko słowa „assioma“, a np. K. Vahlen w dziele zatytułowanym „Abstrakte Geometrie“ wyraźnie rozróżnia pojęcia „pewnik“ (Axiom) i „postulat“ (Postulat). Pewnikami nazywa on prawdy nacechowane bezpośrednią pogładową oczywistością (unmittelbare anschauliche Gewissheit), a do rzędu postulatów zalicza takie, jak np. znana zasada Archimedesowa w Geometrii metrycznej, które nie zawierają w sobie niczego zmuszającego nieodwołalnie do uznania (denen nichts Zwingendes und Unvermeidliches innewohnt). Takimi są też zasada ciągłości i postulat euklidesowy o liniach równoległych. „Stąd też wypada — według Vahlena<sup>2)</sup> — podwójna konieczność z jednej strony podstawy wznosić możliwie niezależnie od każdego postulatu, a z drugiej równoległe do każdego takiego postulatu założenia jemu przeciwne przedyskutować i tem samem nie metryczną (nie-archimedesową), nie-ciągłą, nie-euklidesowe geometrye rozpatrywać“. Wspomniane wyżej stanowisko Enriquesa jest zgodne z duchem euklidesowego systematu, oznacza tylko dalszy stopień rozwoju myśli w kierunku logicznym. Pewnik jest tu integralną, organiczną, formalną funkcją myśli, stojącą tem samem po za nawiasem wszelkiej wątpliwości.

Wspomniane powyżej rozróżnianie dwóch rodzajów prawd zasadniczych ma swoje powody, zdaniem naszym, następujące: 1-o. W grę wchodzi dwa czynniki natury bardzo różnej: bezpośrednia oczywistość w oglądaniu i jasność, a także minimum treści logicznej; 2-o prawdy zasadnicze z samej natury nauki istnieć muszą, nie można zaś powiedzieć nigdy, że przyjęte są najprostsze<sup>2)</sup> i że dany układ nie może być

---

<sup>1)</sup> Poincaré twierdzi, że pewniki euklidesowe stanowią najprostszy układ „umów“, co ze stanowiska logicznego, zdaniem naszym, nie da się, a przynajmniej nie jest dowiedzione.

<sup>2)</sup> 1. c. str. 3.

zastąpiony przez inny, również zawierający założenia niezależne, ale mające mniejszą treść logiczną; 3-o, sam proces eliminacji tych prawd jest funkcją rozwoju nauki; 4-o, charakter ogólny prawd podstawowych zależy od stanowiska teoryo-poznawczego danego badacza.

Przyjrzyjmy się każdemu ze wspomnianych punktów oddzielnie.

Znaną jest rzeczą, że wielka ilość t. zw. twierdzeń, a więc prawd, które można wywnioskować z założeń danych podstawowych, jest jasna od pierwszego wejrzenia. Nikt nie wątpi, że dwa okręgi mogą się przecinać tylko w dwóch punktach najwyżej, że dwie figury płaskie symetryczne względem punktu, płaszczyzny lub prostej przystają do siebie (są równe), że istnieje tylko jeden środek odcinka, tylko jedna dwusieczna kąta i t. d. W wykładzie jednakże ściśłym dowodzimy tego wszystkiego i jeżeli to robimy, to nie dla tego, że chodzi o przekonanie się silniejsze, lecz o związek logiczny pomiędzy różnego rodzaju prawdami, o minimum założeń wogóle. Prawda jasna w oglądaniu jest dla nas prawdą indywidualną, odosobnioną niejako, my chcemy (i tu jest jeden z postulatów ogólnych) związać ją z innymi, uspołecznic, że tak powiem. Czasem się to nam udaje, czasem nie. Zatrzymujemy się tak, jak chemik na swych pierwiastkach, nie z racji istotnej rzeczy właściwości, lecz dla tego, że brak nam środków analitycznych. To jedno. Z drugiej strony każda prawda, bezpośrednio narzucająca się nam w oglądaniu z przyczyny swej indywidualności, zawiera w sobie pewną zawartość niewymierną, którą analiza logiczna stara się usunąć, wiążąc ją w łańcuch skończony lub nieskończony z innymi racjonalnie bezpośrednio jasnymi. Przekątna kwadratu jest bezpośrednio dana w oglądzie, z pewnego zaś punktu widzenia, pewna jej cecha, zwana „długością“, może być ujęta w związku z całą figurą (kwadrat) tylko w danym przypadku za pomocą nieskończonego łańcucha podobnych wniosków. Gdybyśmy oddzielnie narysowali dwa odcinki, związek pomiędzy nimi, według cechy „długość“, nie mógłby być ujęty logicznie ani ogólnie doświadczalnie skonstatowany. Dla ustalenia takiego związku konieczne jest połączenie danych odcinków w pewnej więcej skomplikowanej figurze w pewną jakość geometryczną, którą można rozpatrywać jako funkcję tychże. Zamiana elementów danych bezpośrednio w oglądaniu na elementy logiczne nie może być nigdy w całości przeprowadzona, konieczną bowiem jest pewna jakość specjalna, której nigdy analiza logiczna dać nie może, a co całkowicie



w oglądzie leży. To też twierdzi Peano o niemożliwości zdefiniowania zasadniczych elementów nauki. Kwestya może być tylko w zmniejszaniu obszaru oglądowego, nigdy zaś w wykluczeniu tegoż. Widzimy więc stąd, że najpierw musi być dana specjalna charakterystyczna jakość geometryczna, muszą być dane elementy i to właśnie stanowi treść, naszym zdaniem, wszelkich założeń. Z drugiej strony sam fakt istnienia dwóch kryteriów oczywiście jest źródłem dwojakiego rodzaju prawd zasadniczych.

Dzięki temu, co się tyczy drugiego ze wspomnianych punktów jest jasnym, że wobec zmienności zasadniczych prawd wogóle te, które narzucają się nam bezpośrednio, są jakby organicznie z samem myśleniem związane, odróżniane są od tamtych, które są rezultatem niejako odwrócenia naturalnego tejże biegu. Nie można jednakże tu według powyższej normy absolutnie rozróżniać prawd, gdyż i pierwsze podlegają też analizie; należy jednakże zwrócić uwagę na to, iż drugiego rodzaju założenia przyjmowane są więcej świadomie, więcej ze względu na całość budowy naukowej, gdy pierwszym w daleko większej mierze przynależą pierwiastek samorzutności.

W miarę tego, jak się rozwija nauka, jak się różniczkują integralne początkowo jej składniki, występować mogą i w oczy się rzucać takie pierwiastki, które w stanie embryonalnym nie mogły być jasno uświadomione. Euklides np. nie mówi wcale o postulatcie swobodnego poruszania się, na który zwrócili uwagę Riemann i Helmholtz; pierwszy, kwestyonując przeniesienie norm, panujących w świecie dla nas dostępnym do nieskończenie małych lub wielkich obszarów, drugi, tworząc empirycznego pochodzenia, według jego zdania, pojęcie ciała stałego. Jednorodność przestrzeni jest właśnie, jako założenie podstawowe, przez nas wszędzie uwzględniana. Te nowe odnalezione prawdy, w przeciwstawieniu do innych, dać mogą też powód do rozróżniania różnego rodzaju zasadniczych założeń.

Stanowisko teoryo-poznawcze badacza może wpływać nietylko na sam kierunek badania, ale i charakterystykę zasadniczych założeń. Ścieranie się poglądów i ewentualne kompromisy są powodem dzielenia na dwie grupy założeń głównych nauki. Tak np. poglądy Russela, według których jedne prawdy podstawowe wspólne wszystkim rodzajom Geometrii (jak euklidesowej, tak i nieeuklidesowej) dzielą się na dwie grupy: pierwsza jest dana a priori jako konieczny warunek po-

znania, a druga pochodzi z doświadczenia. Pierwszej możnaby dać nazwę pewników, a drugiej postulatów.

Pomiędzy pewnikami a postulatami istnieje różnica, która się najlepiej da wyrazić znaczeniem dwóch słów niemieckich „sein“ i „sollen“. Pierwsze są podstawowymi prawdami bytu, Statyki nauki, drugie—jej Dynamiki. Podział Eu kl i d e s a jest niewystarczający z bardzo wielu powodów, między innymi i dla tego, że pewniki, postawione przez niego, niezależnymi nie są i że z pod bacznej uwagi wielkiego geometry uszły niektóre subtelniejsze założenia podstawowe. Granica pomiędzy jednymi a drugimi nie jest stała, wykrzywia się ciągle lub zwięża nawet. Swoją drogą ta zmienność granicy, a także niektóre powyżej przytoczone racye mogą być powodem zniesienia jej i używania jednego tylko słowa, do czego, naszym zdaniem, najlepiej nadawałby się wyraz „pewnik“, jako bliższy naszemu językowi. W każdym razie w nauczaniu szkolnem subtelności te uwzględniane być nie mogą, już chociażby dla tego, że przeczy to rozwojowi umysłu ludzkiego, który od naiwnego realizmu idzie do krytycznej teorii poznania, od oglądu przez pojęcia do idei, jak to słusznie zaznaczył Hilbert, biorąc jako motto do swego dzieła zdanie z Kantowskiej krytyki rozumu; ale nauczyciel musi być ich świadom, o ile ceni prawdę nauczania.

---