Czwarty Kongres międzynarodowy matematyków,

odbyty w Rzymie, od 6 do 11 kwietnia 1908.

Dwie instytucye naukowe włoskie zajmowały się przygotowaniami do IV-go Kongresu międzynarodowego matematyków: Akademia dei Lincei w Rzymie i Circolo matematico w Palermo. Na czele pracy organizacyjnej stanął prezydent Akademii dei Lincei senator Blaserna, który powagą swego imienia i wysokiemi zaletami towarzyskiemi był niejako uosobieniem celowej i udatnej pracy Komitetu, którą wraz ze swym przewodniczącym spełniali: sekretarz generalny prof. G. Castelnuovo i skarbnik prof. V. Reina. Oprócz nich zasiadali w Komitecie profesorowie: Cerruti, Di Legge, Pittarelli, A. Sella, A. Tonelli, Volterra. Nadto do Komitetu szerszego międzynarodowego zaproszono znaczną liczbę uczonych, tak włoskich jak i obcych, protektorat zaś nad kongresem objął król.

Kongres liczył około 600 uczestników ze wszystkich krajów cywilizowanych. Stawili się nietylko uczeni europejscy, ale i amerykańscy i japońscy. Francya wysłała na kongres najznakomitszych swoich uczonych: Poincarégo, Picarda, Jordana i Darboux'a; prócz tego jako delegaci rządu francuskiego lub instytucyj naukowych francuskich uczestniczyli: J. Hadamard i B. Niewęgłowski, inspektor generalny wychowania publicznego; E. Borel był delegatem służby statystycznej, d'Ocagne delegatem ministeryum robót publicznych i t.d. Z uczonych niemieckich stawili się: Gordan, Noether, Minkowski, Dyck, Korn i wielu innych. Uczonych angielskich reprezentował Forsyth, amerykańskich astronom Newcomb; uczonych holenderskich fizyk Lorentz; matematyków skandynawskich: Zeuthen, Mittag-Leffler i Fredholm. Z uczonych rosyjskich przybyli pomiędzy innymi Liapunow, Stekłow i Sałtykow. Z Krakowa przybyli Zaremba i Żorawski, z Wiednia Mertens. Matematycy włoscy stawili się oczywiście najliczniej, prawie w komplecie; jedynie tylko prof. Veronese, z powodu choroby, niestawił się i nie mógł wygłosić zapowiedzianego odczytu „O Geometryi niearchimedesowej“.

Organizacya kongresu była pomyślana i przeprowadzona znakomicie. Czynności kongresu podzielone były na posiedzenia ogólne i posiedzenia sekcyjne. Posiedzeń ogólnych, prócz pierwszego zebrania inauguracyjnego, odbyło się pięć; posiedzenia sekcyjne odbywały się w następujących pięciu sekcyach: I. Sekcya Analizy. II. Sekcya Geometryi. III^a. Sekcya Mechaniki i Fizyki matematycznej. III^b. Sekcya zastosowań Matematyki (pomiędzy innemi do Statystyki i do Teoryi ubezpieczeń). IV. Sekcya Filozofii, Historyi i Dydaktyki. Wszystkie posiedzenia, tak ogólne jak i sekcyjne, odbywały się w pięknych salach Akademii dei Lincei, zajmującej górne piętro bogatego, pełnego dzieł sztuki, pałacu Corsini.

Posiedzenie inauguracyjne kongresu odbyło się w obecności króla na Kapitolu w historycznej sali, zwanej salą Horacyuszów i Kuracyuszów. Gości powitał w imieniu miasta pięknem przemówieniem okolicznościowem syndyk Rzymu Ernesto Nathan; przewodniczący w komitecie organizacyjnym senator Blaserna zdał krótko sprawę z prac przygotowawczych i wyraził podziękowanie tak królowi jak i władzom za życzliwe współdziałanie, poczem minister oświaty prof. Rava, witając uczestników kongresu w imieniu rządu, wypowiedział mowę, w której scharakteryzował kilkoma dobitnemi rysami zadania nauk matematycznych i dzieje ich we Włoszech. Zakończył to posiedzenie inauguracyjne odczyt profesora Volterry „O Matematyce we Włoszech w drugiej połowie XIX stulecia“.

Na pierwszem posiedzeniu plenarnem, które odbyło się tegoż dnia o godzinie 3 ej popołudniu, odbyły się najpród wybory do prezydyum kongresu. Przez aklamacyę powołany został na prezesa prof. Blaserna, a na propozycyę komitetu organizacyjnego na wiceprezesów zaproszeni zostali: Cerruti, D'Ovidio, Forsyth, G o r d a n, J o r d a n, L o r e n t z, M e r t e n s, M i t t a g - L e f f l e r, N e w c o m b, W a s i l j e w (nieobecny) i Z e u t h e n. Sekretarzem generalnym kongresu został C a s t e l n u o v o, wicesekretarzami F a n o i R e i n a; sekretarzami przybranymi: B o r e l, B a r n e s, H a d a m a r d, H o l g a t e, K r a z e r, P h r a g m é n, S c h l e s i n g e r.

Prof. S e g r e odczytał w imieniu N o e t h e r a, P o i n c a r é g o i własnem sprawozdanie o wyniku konkursu, ogłoszonego na III kongresie międzynarodowym matematyków, odbytym w Heidelbergu w roku 1904 (patrz „Wiadomości matematyczne" t. 8, str. 311) na temat, podany z inicyatywy prof. G u c c i a przez Circolo matematico w Palermo. Program konkursu opiewał, że nagroda w medalu złotym wartości 3000 franków przyznana będzie za rozprawę, która s p r a w i p o s t ę p i s t o t n y w t e o r y i k r z y w y c h s k o ś n y c h a l g e b r a i c z n y c h, przyczem zastrzeżono, że gdyby żadna z prac nadesłanych na konkurs nie była uznana za godną odznaczenia, wtedy nagroda ta będzie mogła być przyznana za pracę już ogłoszoną, która i s t o t n i e p o s u w a t e o r y ę p o w i e r z c h n i l u b i n n y c h r o z m a i t o ś c i a l g e b r a i c z n y c h. Z trzech rozpraw, na konkurs nadesłanych, komisya sędziów nie uznała żadnej za kwalifikującą się do nagrody, i dla tego, zgodnie z powyższym programem, zajęła się się zbadaniem, czy pomiędzy rozprawami, ogłoszonemi w okresie od 1904—1907 w dziedzinie Geometryi krzywych skośnych. powierzchn lub innych rozmaitości algebraicznych, niema takich, którym mogłaby być przyznana nagroda konkursowa. Z pomiędzy tych prac komisya wyróżniła rozprawy, ogłoszone przez Franciszka S e v e r i, i zająwszy się szczegółową oceną ich wyników oraz znaczenia dla postępu teoryi krzywych i powierzchni algebraicznych, doszła jednomyślnie do wniosku, że czynią one zadość programowi konkursu i że autorowi winna być przyznana nagroda. Przy oklaskach Zgromadzenia medal wręczony został obecnemu na sali laureatowi.

Na drugiem posiedzeniu polanarnem, odbytem w dniu 7 kwietnia pod przewodnictwem N e w c o m b a, prof. A. R. F o r s y t h wygłosił wykład „O stanie obecnym teryi równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego, ze względu na całkowanie formalne"; prof. D a r b o u x odczytał referat „O metodach i zagadnieniach z Geometryi nieskończonostkowej. Do tych dwu referatów będziemy mieli prawdopodobnie sposobność powrócić. Po tych świetnych odczytach, przyjętych z żywem zadowoleniem przez licznych słuchaczów, prof. Dyck zdał sprawę z biegu prac wielkiego wydawnictwa „Encyklopedyi matematycznej", wychodzącej, jak wiadomo, w wydaniu niemieckiem oraz w rozpoczętej póżniej a prowadzonej pod kierunkiem prof. Molka, edycyi francuskiej.

Na posiedzeniu plenarnem w dniu 8 kwietnia, pod przewodnictwem Gordana, wygłosili odczyty: Newcomb „O teoryi ruchu księżyca, jej historyi i stanie obecnym" i H. A. Lorentz „O rozdziale energii pomiędzy materyę ważką i eter".

Posiedzenie plenarne w dniu 10 kwietnia, odbyte pod prezydencyą Mittag-Lefflera, w obecności ministra oświaty, poświęcone było wykładom dwóch znakomitych przedstawicieli nauki francuskiej Poincarégo i Picarda. Wykład Poincarégo, (odczytany przez Darboux'a, gdyż autor, z powodu zasłabnięcia, nie mógł uczestniczyć na zebraniu) pod zaciekawiającym tytułem: „O przyszłości Matematyki", stanowił niejako pendant do wygłoszonego przed ośmiu laty przez Hilberta na kongresie paryskim wykładu p. t. „O przyszłych zagadnieniach Matematyki" (patrz Wiad. mat. t. 4, str. 181—191). „Aby módz przewidzieć przyszłość Matematyki - powiada Poincaré— trzeba badać jej historyę i stan obecny. Jako matematycy jesteśmy przyzwyczajeni do ekstrapolacyi, która jest środkiem do wnioskowania przyszłości z przeszłości i teraźniejszości, a ponieważ wiemy, co wart ten sposób, więc możemy go stosować bez obawy złudzeń co do wyników, jakie on dać może. Otóż twierdzić można, że Matematyka nie przestanie się rozwijać. Lecz w jakim kierunku—zapytamy. Możnaby odpowiedzieć „we wszystkich kierunkach" i będzie to w części prawdą; lecz gdyby miało się to spełnić dosłownie, perspektywa wciąż rosnących i zwalających się jedne na drugie zdobyczy staćby się mogła przerażającą i być tamą dla poszukiwań. Koniecznym się tedy stanie wybór pomiędzy faktami i zagadnieniami, które poddawać należy badaniom. Wybór ten dyktują nieraz potrzeby nauk fizycznych, ale pomoc niesiona badaczom przyrody stanowić nie powinna jedynego celu nauki, którą należy uprawiać dla siebie samej. W Matematyce interesują nas przedewszystkiem fakty i kombinacye, ważne przez analogie i związki z innemi faktami i kombinacyami. Ważność faktu mierzy się jego wydajnością, t. j. ilością myśli, którą pozwala nam zaoszczędzić (E. Mach). Przykładem jest wzór algebraiczny, jako rozwiązanie typu zadań liczbowych, lub wytworność metod i ich wyników, a więc zadowolenie estetyczne, związane z ekonomią myślenia. Wielką usługę niosą tu wyrazy. Matematyka, powiedział kiedyś mówca, jest sztuką nadawania tej samej nazwy rzeczom różnym: oczywiście różnym co do materyi, lecz podobnym co do formy. szczęśliwie dobrane nazwy usuwają bardzo często wyjątki, które musiano stosować w mowie dawniejszej: przykładem są tu liczby ujemne, urojone, kwaterniony, punkty w nieskończoności, grupa, niezmiennik i t. p. Pojęcie grupy łączy się z pojęciem przekształcenia, Dla czego przywiązujemy tak wielką wagę do odkrycia nowego przekształcenia? Dla tego, że z jednego twierdzenia pozwala ono odrazu wyprowadzić dziesięć lub dwadzieścia innych, na podobieństwo zera, które, umieszczone po prawej stronie liczby całkowitej, powiększa jej wartość dziesięciokrotnie.

Matematyka graniczy zarazem z Filozofią i z Fizyką; pracujemy dla obu sąsiadek i dla tego to widzieliśmy i widzieć będziemy matematyków, kroczących w dwu kierunkach przeciwnych.

Z jednej strony Matematyka musi zastanawiać się sama nad sobą, i to jest użyteczne, albowiem zastanawiać się nad sobą jest to zastanawiać się nad umysłem ludzkim, który stworzył tę naukę, zwłaszcza, że jest to ta z jej kreacyj, przy której najmniej zapożyczył się zewnątrz. I dla tego pożytecznemi są spekulacye nad postulatami, nad niezwykłemi Geometryami, nad funkcyami o dziwnym przebiegu. Im bardziej te spekulacye oddalać się będą od zwykłych koncepcyj, a więc od przyrody i zastosowań, tem lepiej wykażą one, co umysł ludzki zdziałać potrafi, jeżeli usunie się z pod tyranii świata zewnętrznego, i tem lepiej potrafimy poznać samych siebie.

Z drugiej strony siły armii naszej należy skupiać po stronie przeciwnej, t. j. po stronie przyrody.

Przechodząc od tych uwag ogólnych do pojedyńczych gałęzi Matematyki, Poincaré rozważa po kolei następujące jej działy.

W Arytmetyce, w której rozwój był powolniejszy od rozwoju Algebry i Analizy, a liczba znanych twierdzeń ogólnych jest mniejsza, niż w dwu ostatnich gałęziach, trzeba będzie w przyszłości kierować się analogiami z Algebrą. Na porządku dziennym przyszłych prac stoi tu teorya liczb przestępnych, której klasyfikacyę oprzeć będzie trzeba na klasyfikacyi funkcyj przestępnych. Paralelizm kongruencyj i równań algebraicznych trzeba będzie uzupełnić i wyzyskać. Teorya krzywych i ich przecięć na powierzchni posłuży jako analogia dla teoryi ideałów. Do teoryi przekształceń, stosowanych w Geometryi analitycznej, należy sznkać analogij arytmetycznych na drodze wskazanej w „Geometrie der Zahlen“ Minkowskiego. Trzeba będzie wyzyskać mało dotąd spożytkowaną metodę zmiennych ciągłych, wprowadzoną przez Hermite'a. W teoryi liczb pierwszych wykryto dotąd jedynie prawa asymptotyczne, lecz te prawa są odosobnione i dochodzi się do nich na drogach całkiem różnych. Mówca przewiduje, że będzie można osiągnąć jednolitość metody przez badanie rodziny funkcyj przestępnych; rozważanie ich punktów osobliwych i zastosowanie metody Darboux'a pozwolą na obliczanie asymptotyczne pewnych funkcyj liczb bardzo wielkich.

W Algebrze teorya równań algebraicznych długo jeszcze zaprzątać będzie uwagę geometrów. Pytania, dotyczące obliczania pierwiastków i dyskusya nad liczbą pierwiastków rzeczywistych jeszcze nie są wyczerpane. Trzeba będzie zbadać układ niezmienników, nie zmieniających znaku, gdy liczba pierwiastków rzeczywistych pozostaje niezmienną. Można też będzie tworzyć szeregi potęgowe, przedstawiające funkcye, których punktami osobliwemi będą różne pierwiastki równania algebraicznego (np. funkcye wymierne, których mianownikiem jest pierwsza strona równania); spółczynniki wyrazów dość oddalonych dadzą nam wtedy jeden z pierwiastków z większem lub mniejszem przybliżeniem. Nie jest też wyczerpana teorya niezmienników form algebraicznych. Twierdzenia znane nasuwają nam inne ogólniejsze. Twierdzenie Gordana, w dowodzeniu tak szczęśliwie uproszczone przez Hilberta, prowadzi do pytania następującego: jeżeli mamy nieskończenie wiele wielomianów całkowitych, zależnych algebraicznie od skończonej liczby z pomiędzy nich, to czy można je otrzymać ze skończonej liczby wielomianów przy pomocy dodawania i odejmowania?

W Teoryi równań różniczkowych pozostaje udoskonalić teoryę równań liniowych. W teoryi równań nieliniowych pozostaje jeszcze wiele do zrobienia; trzeba będzie rozwinąć usiłowania w celu osiągnięcia klasyfikacyi systematycznej funkcyj, określonych przez takie równania; badanie wzrastania tych funkcyj w blizkości punktów osobliwych da nam bezwątpienia pierwsze elementy tej klasyfikacyi, lecz nie wystarczy to, póki nie znajdziemy pewnej grupy przekształceń (np. przekształceń Cremony), które odnośnie do tych równań odgrywać będą tę samą rolę, jaką ma grupa przekształceń dwuwymiernych dla krzywych algebraicznych. Można też będzie postawić zagadnienie o sprowadzeniu badania tych funkcyi do badania funkcyj jednokształtnych i to dwoma sposobami Wiadomo, że jeżeli $y=f(x)$, to jakiemkolwiek będzie $f(x)$, można wyrazić y i x przez funkcye jednokształtne zmiennej pomocniczej t, lecz jeżeli $f(x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego, w jakim przypadku funkcye jednokształtne pomocnicze czynić też będą zadość równaniom różniczkowym? Nie wiemy tego; nie wiemy też, w jakich przypadkach całka ogólna da się przedstawić w postaci $F(x,y)=$ stałej, gdzie $F(x,y)$ jest funkcyą jednokształtną.

W Teoryi równań o pochodnych cząstkowych uczyniono znaczny postęp, dzięki odkryciu Fredholma. Istota tych odkryć polega na wzorowaniu tej trudnej teoryi na teoryi prostszej wyznaczników i układów równań stopnia pierwszego. Równanie o pochodnych cząstkowych przedstawia niejako nieskończoność ciągłą równań, funkcya niewiadoma przedstawia nieskończoność ciągłą niewiadomych. Otrzymujemy tedy wyznaczniki nieskończone, które tak się mają do wyznaczników zwykłych, jak całka do sum skończonych. To właśnie uczynił Fredholm, a powodzenie jego metody wypływa z następującego faktu: jeżeli w wyznaczniku elementy przekątnej głównej są równe 1, a inne elementy uważane są jako jednorodne rzędu pierwszego, to rozwinięcie wyznacznika można uporządkować, łącząc w jednę grupę mnogość wyrazów jednorodnych tego samego stopnia. Wyznacznik nieskończony Fredholma nadawał się do tego uporządkowania i otrzymano tym sposobem szereg ciągły.

Czy ta analogia, która kierowała krokami Fredholma, dała już wszystko, co dać powinna? Na pewno nie; jeżeli powodzenie wypływa z formy liniowej równań, to należałoby zastosować te pomysły do wszelkich równań postaci liniowej, a nawet do równań różniczkowych zwyczajnych, ponieważ ich rozwiązanie może być zawsze sprowadzone do całkowania równania liniowego o pochodnych cząstkowych stopnia pierwszego.

Podjęto niedawno na nowo zagadnienie Dirichleta i inne zagadnienia z niem związane przez powrót do pierwotnej myśli Dirichleta: szukania minimum pewnej całki określonej, lecz tym razem za pomocą postępowania ścisłego. Nie wątpię, że dojdzie się, bez wielkiej trudności, do zbliżenia dwu metod, do zdania sobie sprawy z ich związków wzajemnych. Dziś nauka postępuje po tej drodze dzięki Hilbertowi, który dał inicyatywę do tych badań w jednej i drugiej dziedzinie.

W Teoryi funkcyj abelowych zagadnienie główne jest następujące: funkcye abelowe powstałe z całek, odnoszących się do krzywej algebraicznej, nie są najogólniejszemi, stanowiąc tylko przypadek szczególny. Jaki jest ich związek z funkcyami ogólnemi i w jaki sposób można rozklasyfikować te ostatnie? Niedawno rozwiązanie tego zadania zdawało się być odległem. Dziś można zadanie to uważać za przygotowawczo rozwiązane, od chwili, w której Castelnuovo i Enriques ogłosili pracę o całkach różniczek zupełnych rozmaitości więcej niż dwuwymiernych. Wiemy dziś, że istnieją funkcye abelowe, związane z krzywą i innemi krzywemi na powierzchni, że nie będzie potrzeba wznieść się do rozmaitości więcej niż dwuwymiarowych; kombinując zaś ten wynik z wynikami prac Wirtingera, będzie można pokonać wszystkie nastręczające się tu trudności.

W Teoryi funkcyj dwu i więcej zmiennych należy uwzględnić analogię z funkcyami jednej zmiennej. Ta nowa analogia nie jest wszakże wystarczająca; pomiędzy temi kategoryami funkcyj istnieje różnica zasadnicza i ile razy próbujemy uogólnień w przechodzeniu od jednej do drugiej, natrafiamy na przezwyciężone niemal przeszkody. Należy wyjaśnić sobie, na czem polega ta zasadnicza różnica. Trzeba będzie najprzód bliżej przyjrzeć się tym sposobom sztucznym, które doprowadziły do pożądanego wyniku w przypadkach szczególnych. Dla czego odwzorowanie podobne jest najczęściej niemożliwe w obszarze czterowymiarowym i co należy postawić zamiast niego? Czy prawdziwe uogólnienie funkcyj jednej zmiennej nie tkwi w funkcyach harmonicznych o czterech zmiennych, których części rzeczywiste funkcyj o dwu zmiennych są tylko przypadkami szczególnemi? Czy będzie można osiągnąć korzyść dla badania fnnkcyj przestępnych o większej liczbie zmiennych z tego, co wiemy o funkcyach algebraicznych lub wymiernych, lub—innemi słowy—w jakiem znaczeniu można powiedzieć, że funkcye przestępne o dwu zmiennych tak się mają do funkcyj przestępnych o jednej zmiennej, jak funkcye wymierne o dwu zmiennych do funkcyj wymiernych o jednej zmiennej?

Czy jest prawdą, że jeżell $z = f(x, y)$, to można, bez względu na naturę funkcyi f, wyrazić x, y, z jako funkcye jednokształtne dwu zmiennych pomocniczych, lub—jak się zwykło teraz mówić—ujednokształtnić funkcye dwu zmiennych, tak jak ujednokształcamy funkcye jednej zmiennej? Być może, że blizka przyszłość da nam odpowiedź na to pytanie.

W Teoryi grup dotknę tu tylko grup ciągłych Liego i grup nieciągłych Galois'a; jedne i drugie kwalifikujemy jako grupy rzędu skończonego, jakkolwiek ten wyraz ma dla jednych i dla drugich znaczenie odmienne.

W teoryi grup Liego kierujemy się analogią specyalną: przekształcenie skończone jest wynikiem kombinacyi nieskończonej liczby przekształceń nieskończonostkowych. Przypadek najprostszy jest ten, w którym przekształcenia nieskończonostkowe sprowadzają się do mnożenia przez $1+\varepsilon$, gdzie ε jest bardzo małe. Powtórzenie tych przekształceń wytwarza funkcyę wykładniczą; doszedł do tego już Neper. Wiemy, że funkcya wykładnicza może być przedstawiona przez szereg bardzo prosty i bardzo zbieżny, i analogia może nam wskazać drogę postępowania. Analogia ta może być zresztą wyrażona zapomocą specyalnego symbolizmu. W tym kierunku uczyniono już postęp dość znaczny, dzięki pracom Liego, Killinga i Cartana; pozostaje tylko uprościć dowody, uporządkować i rozklasyfikować wyniki.

Badanie grup Galois'a postąpiło znacznie mniej i to z tych samych powodów, dla jakich Arytmetyka mniej postąpiła od Analizy. Lecz na szczęście istnieje pomiędzy dwiema teoryami wyraźny paralelizm, który należy postarać się lepiej uwidocznić.

Geometrya zdaje się na pozór nie zawierać nic ponadto, co Algebra lub Analiza wyraża w innym języku. Lecz tak nie jest. Rozważania geometryczne prowadzą do nowych zagadnień. Są to, jeżeli chcemy, zagadnienia analityczne, których nie postawilibyśmy wszakże w Algebrze. Pojęcie Geometryi więcej niż trójwymiarowej daje nam najprzód język bardzo dogodny, wyrażający w sposób bardzo treściwy to, co zwykły język analityczny mógłby wyrazić tylko bardzo rozwlekle. Dalej język ten pozwala nam nadawać jednę nazwę rzeczom podobnym, ustanawiać analogie, których nie pozwala nam zapominać. Ta Geometrya więcej

więcej niż trójwymiarowa nie jest zwykłą Geometryą analityczną, nie jest czysto ilościową, jest ona też jakościową i dla tego jest szczególnie interesującą. Ważność Analizy położenia (Analysis Situs) jest ogromna i nie mogę dość na to położyć nacisku. Stwierdza to korzyść, jaką wyciągnął z niej Riemann, jeden z głównych jej twórców. Jeżeli potrafimy zbudować ją całkowicie dla przestrzeni wyższych, posiądziemy narzędzie, które pozwoli nam widzieć w nadprzestrzeni i zastąpi nam zmysły. Zagadnienia tej Analizy nie byłyby może postawione, gdybyśmy mówili tylko językiem analitycznym, albo raczej —byłyby napewno postawione, gdyż ich rozwiązanie jest niezbędne dla mnóstwa kwestyj analitycznych, ale kwestye byłyby wtedy stawiane osobno jedne po drugich, bez dopatrzenia się wspólnego ich związku.

Najnowsze postępy w Geometryi dokonane zostały pod wpływem wprowadzenia pojęć przekształceń i grup. Dzięki tym pojęciom, Geometrya osiągnęła jedność. Z drugiej strony należy pamiętać, że, dzięki Geometryi, zaczęto badać systematycznie przekształcenia ciągłe, i tym sposobem geometrowie pracami swemi przyczynili się do rozwoju pojęcia grupy, tak użytecznege w różnych gałęziach Matematyki.

Badanie grup punktów na krzywej algebraicznej sposobem wskazanym przez Brilla i Noethera da nam jeszcze wyniki nowe czy to wprost, czy też jako wzór dla innych teoryj analitycznych. Widzimy też, że rozwija się rozdział Geometryi, w której krzywe, nakreślone na powierzchni, grają rolę, podobną do roli grup punktów na krzywej. Można mieć nadzieję, że na tej drodze odsłonimy ostatnie tajemnice teoryi powierzchni.

Mamy tedy w Geometryi obszerne pole pracy, do którego zaliczyć też należy Geometryę liczącą, a zwłaszcza Geometryę nieskończonostkową, uprawianą z takiem powodzeniem przez Darboux'a i Bianchi'ego.

Teorya mnogości Cantora (kantoryzm) oddała nauce usługi, o których wiemy. Jedną z jej cech charakterystycznych jest to, że zamiast wznosić się do ogólności przez budowanie coraz bardziej zawiłych konstrukcyj i definiowanie przez konstrukcyę, wychodzi ona z genus supremum i definiuje, jak powiedzieliby scholastycy, przez genus proximum et differentiam specificam. Stąd to niechęć, jaką obudziła w niektórych umysłach, np, Hermite'a, którego ideą ulubioną było porównanie nauk matematycznych z przyrodniczemi. U większości z nas rozwiały się te uprzedzenia, lecz natknęliśmy się zato na pewne paradoksy, na pewne sprzeczności pozorne, które uradowałyby Zenona z Elidy i szkołę Megarską. Musimy na nie szukać lekarstwa. Co do mnie sądzę — i nie jestem tu jedyny — że rzeczą ważną jest, abyśmy nie wprowadzali nigdy tworów, które nie dają się zdefiniować za pomocą skończonej liczby wyrazów. Bez względu na to, jakie lekarstwo na to będzie zastosowane, możemy sobie uprzytomnić radość lekarza, powołanego do zajęcia się tym bardzo pięknym przypadkiem patologicznym.

Badanie postulatów. Z drugiej strony jesteśmy zmuszeni do wyliczania aksiomatów i postulatów mniej lub więcej ukrytych, które są podstawą różnych teoryj matematycznych. Hilbert otrzymał tu świetne wyniki. Zdaje się na pozór, że dziedzina ta jest ograniczona i że nie pozostanie nic do robienia, skoro inwentarz będzie gotowy. Tak nie jest. Gdy wszystko już będzie wyliczone, trzeba będzie przystąpić do porządkowania; dobry bibliotekarz znajdzie tu zawsze zajęcie i każda klasyfikacya będzie nauczająca dla filozofa.

Mniemam — kończy Poincaré, — że przykłady, które podałem, wystarczą do okazania, przy pomocy jakiego to mechanizmu nauki matematyczne postępowały w przeszłości i jak postępować będą w przyszłości.

Prof. Picard w wykładzie swym „O związku Analizy z Fizyką matematyczną“ poruszył żywy, interesujący zarówno matematyków jak i fizyków, temat, któremu poświęcali często uwagę Poincaré i sam prelegent w poprzednich swych pracach[1]. Z treści tego wykładu później postaramy się obznajmić czytelników.

Na posiedzeniach sekcyjnych przedstawili komunikaty:

W sekcyi I-ej. P. Gordan „O rozwiązywaniu równań ogólnych stopnia 2-go“. Zermelo „O podstawach Arytmetyki i Algebry“. Borel „O zasadach teoryi mnogości“. Riesz „Pojęcie ciągłości i abstrakcyjna nauka o mnogościach“. Frizell „O mocy kontynuum“. Koebe „O pewnej ogólnej zasadzie ujednokształcania“. Boutroux „O inwersyi funkcyj całkowitych“. Petrovich „O pewnej klasie szeregów całkowitych“. Pincherle „Z dziedziny funkcyj wyznaczających“. Young „O pewnych zastosowaniach funkcyj półciągłych“.

---

[1]) Patrz „Wiadomości matematyczne“ t. 2 str. 10—20. 4 str. 178.

Hadamard „O zastosowaniu metody pewnej Rachunku waryacyjnego". Schlesinger „O niektórych zagadnieniach parametrycznych z teoryi równań różniczkowych liniowych". Rémoundos „O zerach całek pewnej klasy równań różniczkowych". Pick „O równaniu różniczkowem funkcyi hypergeometrycznej". Sałtykow „O istnieniu całek zupełnych Liego i udoskonaleniu metody Jacobi'ego w teoryi równań cząstkowych". Lalesco „O rozwiązaniach analitycznych równania $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial x}{\partial y}$. Volterra „O rozwiązaniach równań typu hyperbolicznego". Zervos „O odpowiedniości pomiędzy teoryami całkowania równań o pochodnych cząstkowych rządu 1-go a całkowaniem układów Monge'a". Moore „O pewnej formie Analizy ogólnej z zastosowaniam do równań różniczkowych i całkowych". Fredholm „O całkach Fouriera i teoryi równań całkowych liniowych". Adhémar „O równaniach całkowych Fredholma i Volterry". Orlando „O rozwiązywaniu równań całkowych". Capelli „O spółczynnikach rozwinięć funkcyj algebraicznych". Nicoletti „Redukcya pęka form dwuliniowych do formy kanonicznej". Fubini „O teoryi grup nieciągłych". Dickson „O ostatniem twierdzeniu Fermata". B. Levi „O równaniu nieoznaczonem stopnia 3-go". Frattini „Pojęcia skaźnika i Analiza nieoznaczona wielomianów całkowitych". Severini „O nieskończonych ciągach funkcyj analitycznych". Zaremba „O zasadzie Dirichleta". Boggio „O rozwiązywaniu klasy równań algebraicznych, występującej w Matematyce finansowej i aktuaryalnej (ubezpieczeń)". Autonne „O funkcyach jednorodnych zmiennej nadzespolonej". Pascal „O teoryi form różniczkowych wyższego rzędu".

W Sekcyi II. Andrade „Twierdzenie Ampére'a-Stokesa i postulat Euklidesa". Varičak „Przyczynek do Geometryi analitycznej nieeuklidesowej". Zeuthen „Przykład odpowiedniości bez „Werthigkeit". Montesano „O kompleksach dwuliniowych linij stożkowych w przestrzeni. Severi „O niektórych nowych wynikach w Geometryi algebraicznej i o pewnem zagadnieniu z nią związanych". Bagnera „O równaniach algebraicznych $f(x, y, z) = 0$, które można rozwiązać przez funkcye x, y, z, będące funkcyami meromorficznemi dwu parametrów". De Franchis „O powierzchniach regularnych rodzaju jeden, zezwalających na przedstawienie parametryczne za pomocą funkcyj hypereliptycznych dwu argumentów". Bianchi

„O przekształceniach Darboux'a powierzchni o polu najmniejszem“. Pannelli „O pierwszej cesze rozmaltości algebraicznej o trzech wymiarach“. Dingeldey „Tworzenie stożkowych według Braikindrige'a i Maclaurina“. Finsterbusch „O rozszerzeniu zagadnienia o zamykaniu (Schliessungsproblem) Steinera i jego związku z teoryą układów soczewkowych centrowanych Gaussa“. Gallucci „O konfiguracyi harmonicznej“. Brückner „Uwagi nad morfologią wielkościanów osobliwych“. Brouwer „Teorya grup skończonych i ciągłych, niezależna od aksiomatów Liego“. Tzitzeica „O nowej klasie powierzchni“. Pfeiffer „O rozwinięciu funkcyj algebraicznych dwu zmiennych niezależnych na szeregi całkowite“. Rados „O stycznych zwrotu krzywych skośnych“.

W Sekcyi IIIa. G. H. Darwin „O sztywności ziemi“. Lamb „O zgięciu wązkich prętów“. Lauricella „O równaniu $\Delta^{2n} V=0$ i niektórych uogólnieniach równań sprężystości“. Somigliana „O odkształceniach sprężystych nieregularnych“. Abraham „Z teoryi hamulców wirowych“. Andrade „O nowej metodzie mierzenia tarcia“. Korn „O drganiach uniwersalnych materyi z zastosowaniem do teoryi ciążenia i sił międzycząsteczkowych“. Levi-Civita „O wyrażeniu asymptotycznem potencyałów opóźnionych“. Garbasso „O świetle białem“. Greenhill „Geometrya ruchu bąka“. Boggio „O niektórych twierdzeniach Fizyki matematycznej“. Boccardi „O nowem równaniu w obserwacyi przejść“. Andrade „Synchronizacya przy pomocy żelaza miękkiego“. Génese „Metoda biegunowych wzajemnych w zastosowaniu do sił w przestrzeni“. Tedone „O zagadnieniu Lamé'go. Bryan „O kierowaniu automobilami i kołysaniu się okrętów“. Poynting i Barlow „O momencie wiązki światła“. Kołosow „O zagadnieniu płaskiem w teoryi sprężystości“. Marcolongo „O ujednostajnieniu znakowań wektoryalnych“. Pizzetti „O redukcyi szerokości i długości do poziomu morza“. Casazza „Nowa dedukcya w teoryi składania ruchów“. Beljankin „Przykład siły środkowej takiej, że punkt materyalny może opisywać krzywą rzędu 2-go“.

W Sekcyi IIIb. Toja „Niektóre uwagi nad związkiem pomiędzy Matematyką a nauką aktuaryalną“. Quiquet „O nowem zastosowaniu jakobianów do prawdopodobieństw życiowych“. Poussin „O zastosowaniu graficyzmu do rachunków ubezpieczeń“. Eld e r t o n „Porównanie niektórych krzywych używanych przy klasyfikacyi". B o h l m a n n „O zasadach Rachunku prawdopodobieństwa i ich zastosowaniu do ubezpieczeń życiowych". B o r e l „O zastosowaniu Rachunku prawdopodobieństwa do nauk biologicznych". M a r c h „O nowej międzynarodowej statystyce ludności. Uwaga o porównywaniu i terminologii statystycznej". D e H e l g u e r o „O przedstawieniu analitycznem niektórych statystyk". L e m b o u r g „Aktuaryusz, jego funkcye i dwie jej strony". G i n i „Prawidłowość zjawisk rzadkich". D a w s o n „Ostrożności konieczne przy traktowaniu zagadnień aktuaryalnych". C a s t e l l i „O wykładzie Matematyki aktuaryalnej i finansowej w szkołach zawodowych niższych, średnich i wyższych". L u i g i „Uwagi o związku pomiędzy naukami matematycznemi i budownictwem". C a n e v a z i „Matematyka i sztuka konstrukcyjna we Włoszech". D'O c a g n e „Technika rachunku w sztuce inżynierskiej". T e n ż e „O przybliżonej rektyfikacyi łuków kołowych". C l a x t o n - F i d l e r „O zastosowaniu Matematyki do teoryi budowy". S w a i n „O nauczaniu i pożytku Matematyki w zawodzie inżynieryi cywilnej".

W Sekcyi IV-ej, której posiedzenie zagaił F. E n r i q u e s przemówieniem p. t, „Matematyka i Filozofia", wygłoszone były następujące komunikaty: H e s s e n b e r g „Liczenie i poglądanie". B o u t r o u x „O związku Algebry i Analizy matematycznej". I t e l s o n „Logika i Matematyka". T e n ż e „Dedukcya, Indukcya i Perdukcya". S i m o n „O kontynuum, punkcie i linii prostej — uwagi historyczne". B e r n s t e i n „Wykazanie, że pomiędzy wszystkiemi dowodami twierdzenia Pytagorasa aksiomatycznie najprostszy jest dowód An. N a i r i z i'ego (900 po nar. Chr.)". P a s t o r e „O naturze pozalogicznej praw tautologii i absorbcyi". L o r i a „Tradycye matematyczne Włoch". Z e u t h e n „O związku pomiędzy dawnemi i nowoczesnemi zasadami Geometryi". S m i t h „Ganita-Sara-Sangraha, napisane przez Mahaviracarya". D u h e m (z powodu nieobecności autora referat odczytał prof. Peano) „O odkryciu prawa spadku ciał". G i a c o m e l l i „O wynikach niektórych poszukiwań nad pracami Galileusza z Mechaniki". P i t a r e l l i „Czy Luca P a c i o l i przywłaszczył sobie niektóre prawa Piero de Franceschi?" G u t z m e r „O dążeniach ku reformie w nauczaniu Matematyki w Niemczech". B o r e l „Matematyka w nauczaniu średniem we Francyi". G o d f r e y (referat odczytany przez Vailati'ego) „O nauczaniu Matematyki w szkołach średnich angielskich dla chłopców, uzupełniony ustnie przez Gibsona, który mówił o nauczaniu w szkołach szkockich". Smith „O nauczaniu Matematyki w szkołach w Stanach Zjednoczonych. Suppantschitch „Zastosowanie pojęć nowoczesnych w nauczaniu Matematyki w Austryi", Beke „O nauczaniu Matematyki na Węgrzech". Vaila „O niektórych cechach obecnych pogramów Matematyki w szkołach średnich". Marcolongo „O niewydanym traktacie Mechaniki, wcześniejszym od Mechaniki analitycznej Lagrange'a". Fehr „Matematyka w nauczaniu średniem w Szwajcaryi". Stephanos „Matematyka z nauczania średniem w Grecyi". Archenhold „O znaczeniu nauczania Matematyki na otwartem powietrzu w związku z projektem reformy". Andrade „Kilka obserwacyj psychologicznych w nauczaniu Matematyki". Conti „O nauczaniu początków Matematyki i przygotowaniu matematycznem nauczycieli elementarnych we Włoszech". De Galdeano „Kilka słów o nauczaniu Matematyki w Hiszpanii". Gallucci „Kwestya logiczna i gnoseologiczna w podstawach Matematyki". Broggi „O podstawach Rachunku prawdopodobieństwa„". Emch „O rachmistrzu Winklerze i jogo metodach". Loria „O sposobach ułatwiania pracy i kierowania studyami nad historyą Matematyki". Amodeo „O Błażeju Pelacani". Pittarelli „O listach niewydanych Lagrange'a do opata di Caluso, znajdujących się w Archiwum historycznem municypalnem w Asti". Amodeo „O konieczności utworzenia Archiwum nauk matematycznych". De Amicis „O równoważności w Planimetryi, niezależnie od proporcyi i od koła". Brouwer „Możliwe moce (Machtigkeiten)". Delitala „Trygonometetrya płaska w szkołach średnich".

Uchwały kongresu.

1) Wydawnictwo dzieł Eulera. Na posiedzeniu sekcyi IV-ej prof. Krazer, przypominając, że kongres poprzedni, odbyty w Heidelbergu, powziął uchwałę w sprawie publikacyi dzieł Eulera, stawia wniosek, aby Sekcya, wyraziwszy uznanie dla Towarzystwa przyrodników szwajcarskich za podjęcie inicyatywy w tej sprawie, uchwaliła wniosek:

„Czwarty kongres międzynarodowy matematyków w Rzymie uważa za sprawę wielkiego znaczenia dla nauk matematycznych i stosowanych wydanie wszystkich dzieł Eulera.

Kongres wita z uznaniem inicyatywę, podjętą w tej sprawie przez Towarzystwo przyrodników szwajcarskich, i wyraża życzenie, aby ta wielka praca była dokonana przez toż Towarzystwo przy współudziale matematyków innych narodów.

Kongres uprasza Związek międzynarodowy Akademij, a zwłaszcza Akademie berlińską i petersburską, których Euler był najznakomitszym członkiem, aby poparły to przedsięwzięcie.“

Uchwała ta, odczytana na ostatniem posiedzeniu plenarnem, poparta gorąco przez prof. Darboux'a, została przyjęta jednomyślnie.

2) Utworzenie komitetu międzynarodowego do spraw nauczania Matematyki. Przedmiot ten, na wniosek F. S. Archenholda, był dyskutowany na dwóch posiedzeniach sekcyi IV-ej, poczem przyjęty został następujący porządek dzienny w brzmieniu, zaproponowanem przez prof. Castelnuovo:

„IV kongres międzynarodowy matematyków, uznając ważność dokładnego zbadania programów i metod nauczania Matematyki w szkołach rozmaitych narodów, powierza profesorom Kleinowi, Greenhillowi i Fehrowi podjęcie starań w celu utworzenia komitetu międzynarodowego do badania tej kwestyi i zreferowania jej na najbliższym kongresie międzynarodowym.“

3) Utworzenie komisyi międzynarodowej do unifikacyi notacyj wektoryalnych. Sekcya III po wymianie zdań, z której wypłynęła ważność ujednostajnienia znakowań w Rachunku wektoryalnym, proponuje kongresowi zamianowanie komisyi międzynarodowej do zbadania tej kwestyi. Uprasza się Komitet organizacyjny kongresu, aby zechciał utworzyć taką komisyę na podstawie listy nazwisk, przez Sekcyę zaproponowanych.

Propozycyę przyjęto na ostatniem posiedzeniu plenarnem.

4) Utworzenie Stowarzyszenia międzynarodowego matematyków. Na wniosek prof. Conti'ego, przedstawiony na ostatniem posiedzeniu plenarnem, uchwalono:

„Na porządek dzienny obrad najbliższego kongresu międzynarodowego matematyków wnieść sprawę utworzenia Stowarzyszenia międzynarodowego matematyków“.

5) Utworzenie na przyszłym kongresie specyalnej Sekcyi Matematyki stosowanej do nauk inżynierskich Na wniosek prof. d'Ocaagne'a, przedstawiony na ostatniem posiedzeniu plenarnem, kongres uchwala:

„Powołać komisyę międzynarodową do przygotowania prac nowej Sekcyi i powierzyć utworzenie tej komisyi Prezydyum obecnego kongresu".

6) Wybór miejsca następnego kongresu międzynarodowego matematyków. Prof Forsyth w imieniu Towarzystwa Filozoficznego w Cambridge zaprasza matematyków na kongres międzynarodowy w r. 1812 do Cambridge.

Zgromadzenie przyjmuje jednomyślnie to zaproszenie.

Dodajemy jeszcze, że prof. Mittag-Leffler w imieniu matematyków szwedzkich i upoważniony przez króla Gustawa zaprasza na kongres, mający się odbyć w r. 1916, do Stockholmu.

Uchwalono jednomyślnie przekazać tę propozycyę kongresowi V-mu, mającemu obradować w Cambridge.

Należy wspomnieć jeszcze pokrótce o stronie towarzyskiej kongresu. Pomyślał o niej komitet organizacyjny, urządzając w dniu 5 kwietnia w wielkiej sali Uniwersytetu rzymskiego pierwsze zebranie przedwstępne gości kongresowych, których powitał serdeczną przemową rektor Uniwersytetu Tonelli. Miasto przyjmowało uczestników na uroczystem zebraniu w Salach Muzeum Kapitolińskiego, gdzie wśród arcydzieł sztuki starożytnej ustawione były bufety. Jedno popołudnie spędzili uczestnicy na Palatynie, podejmowani tam gościnnie przez ministra oświaty i oprowadzani po tych wielkopomnych pamiątkach przez specyalnie wydelegowanych rzeczoznawców, którzy dawali interesujące wyjaśnienia. W wielkim amfiteatrze Corea (Mausoleum Augusti) uczestnicy kongresu wysłuchali wspaniałego koncertu religijnego, złożonego z dzieł najprzedniejszych mistrzów. Wreszcie po ukończeniu prac kongresowych odbyli gromadnie wycieczkę kolejową do willi Cesarza Adryana i do malowniczego Tivoli, gdzie obok sławnych wodospadów, pod rozpiętemi na wolnem powietrzu namiotami, odbyła się ostatnia pożegnalna biesiada.

IV-y Kongres międzynarodowy był, rzec można, prawdziwem świętem nauki i pozostawia po sobie najmilsze wspomnienia. Przy surowej powadze poruszonych na nim spraw i pytań nauki, wolny był od wszelkiej urzędowej sztywności. Szczere niewymuszone koleżeństwo cechowało wszystkie zebrania naukowe i towarzyskie. Wymiana myśli odbywała się z całą swobodą, niekrępowaną konwenansami. Stanowisko międzynarodowe nauki i pokrewieństwo badań, podejmowanych w różnych punktach globu ziemskiego, ujawniło się w całej pełni, jak o tem świadczą uchwały Kongresu. Na szczególne zaznaczenie zasługuje fakt, że kongres poświęcił dużo uwagi sprawom nauczania Matematyki i reformy programów szkolnych i że w posiedzeniach, temu przedmiotowi poświęconych, uczestniczyli najpoważniejsi przedstawiciele nauki europejskiej: Dowód to wielkiej doniosłości tej kwestyi dla sprawy ludzkości i zachęta do nieustającej nad nią pracy we wszystkich ogniskach cywilizacyi.

S. Dickstein.