S. ZAREMBA.

Nowa metoda uzasadnienia podstawowych własności funkcyi Greena.[1]

W odczycie tym rozważać będziemy funkcyę Greena klasyczną, a więc funkcyę, którą w razie obszaru trójwymiarowego, określić możemy w sposób następujący: oznaczmy przez (S) powierzchnię, mogącą składać się z kilku oddzielnych powłok i zamkniętą, uskuteczniającą podział przestrzeni na dwa niekoniecznie spójne obszary jeden (D), położony wewnątrz powierzchni, a drugi (D'), położony po jej zewnętrznej stronie; oznaczmy dalej przez A i B dwa na powierzchni (S) nie położone punkty jednego z obszarów (D) albo (D') i uważajmy funkcyę $G(A,B)$ spółrzędnych prostokątnych punktów A i B posiadającą, kiedy uważamy ją za funkcyę spółrzędnych punktu B, własności następujące:

1° Funkcya ta sprawdza rownanie Laplace'a:

$$\Delta G(A,B)=0,$$

w obrębie obszaru (Q), w który przechodzi, po wyłączeniu punktu A, ten z obszarów (D) albo (D'), w którym położony jest punkt A.

2° Różnica:

$$G(A,B)-\frac{1}{4\pi\overline{AB}},$$

zmierza do oznaczonej skończonej granicy w razie, kiedy odcinek $\overline{AB}$ zmierza do zera.

---

[1]) Referat, odczytany w Sekcyi matematyczno-fizycznej X-go Zjazdu lekarzy i przyrodników polskich we Lwowie w r. 1907.

3° Suma funkcya $G(A, B)$ zmierza do zera jednostajnie, jednocześnie z odległością punktu B od powierzchni (S).

4° W razie kiedy punkt A położony jest w obszarze zewnętrznym (D'), a punkt B oddala się nieograniczenie od początku spółrzędnych, funkcya $G(A, B)$ zmierza jednocześnie do zera.

Funkcya $G(A, B)$, którą określiliśmy, jest właśnie funkcyą Greena klasyczną; funkcyę tę zwiemy funkcyą wewnętrzną w stosunku do powierzchni (S) w przypadku, kiedy punkt A położony jest w obszarze (D); jeżeli zaś punkt A należy do obszaru (D'), to nadajemy funkcyi $G(A, B)$ miano funkcyi Greena zewnętrznej.

Ponieważ w definicyi poprzedzającej role punktów A i B nie są symetryczne, przeto nadamy punktom tym nazwy odrębne: punkt A nazwiemy biegunem, a punkt B punktem bieżącym funkcyi Greena.

Dowody wszystkich najważniejszych twierdzeń z teoryi funkcyi Greena, a więc w szczególności dowód twierdzenia opiewającego, że funkcya Greena jest symetryczną w stosunku do spółrzędnych bieguna i punktu bieżęcego, opierają się na twierdzeniu następującem: Funkcya Greena, uważana za funkcyę spółrzędnych punktu bieżącego, posiada oznaczoną pochodną wzdłuż normalnej do powierzchni (S) określającej obszar, do którego funkcya ta należy; wspomniana pochodna jest funkcyą ciągłą spółrzędnych podnóża P odnośnej normalnej, byleby punkt P nie był punktem nieciągłości dostaw kierunkowych normalnej.

Istniejące dowody tego podstawowego twierdzenia oparte są na możności rozwiązania zagadnienia Dirichleta metodą Neumanna i dla tego nie mają należytego stopnia ogólności. Nie ulega więc wątpliwości, że ważną byłoby rzeczą uzasadnić twierdzenie to, zakładając jedynie istnienie funkcyi Greena. Na tem właśnie polega cel odczytu niniejszego.

Metoda, którą podaję, stosuje się równie łatwo do funkcyi Greena zewnętrznej, jak i do funkcyi Greena wewnętrznej. Ażeby ułatwić skupienie uwagi, zwróćmy się do funkcyi wewnętrznej.

Zachowując wszystkie oznaczenia wprowadzone wyżej, załóżmy, że pewnej części (σ) powierzchni (S) odpowiada pewna długość R, różna od zera tak, żeby przez dowolnie przyjęty punkt P na powierzchni (σ) można było przeprowadzić dwie kule (Σ) i (Σ') o danym, byleby od długości R nie większym, promieniu r w taki sposób, aby każdy, od punktu P odmienny, punkt kuli (Σ) położony był wewnątrz obszaru (D), a każdy od tegoż punktu P odmienny punkt kuli (Σ') przypadał wewnątrz obszaru (D').

Przyjmijmy na r wartość od położenia punktu P na części (σ) powierzchni (S) niezależną i od zera odmienną, ale na tyle małą, żeby odległość bieguna A funkcyi Greena od najbliższego punktu, położonego wewnątrz kuli (Σ) albo na jej powierzchni posiadała od punktu P na powierzchni (σ) niezależną, od zera odmienną dolną granicę α.

Oznączmy przez $\mathfrak{G}'(A,B)$ funkcyę Greena zewnętrzną w stosunku do kuli (Σ'). Będziemy tedy mieli:

$$G(A,B) \leqq \mathfrak{G}'(A,B), \tag{1}$$

jakiekolwiek byłoby położenie punktu B w obszarze (D), albo na jego ograniczeniu (S).

Opierając się na znanym wzorze na funkcyę $\mathfrak{G}'(A,B)$ łatwo wnioskujemy z nierówności (1), że zachodzić będzie nierówność następująca:

$$G(A,C) < M.\overline{PC}^2, \tag{2}$$

gdzie oznaczyliśmy przez C dowolnie przyjęty punkt na powierzchni (Σ), a przez M liczbę dodatnią skończoną, niezależną od położenia punktu P na powierzchni (σ) i od położenia punktu C na powierzchni kuli (Σ).

Zważmy, że mamy:

$$G(A,B) = \int\limits_{(\Sigma)} G(A,C)\frac{d\mathfrak{G}(B,C)}{dN_c}\, ds_c, \tag{3}$$

zakładając, iż punkt B położony jest wewnątrz kuli (Σ) i oznaczając przez $\mathfrak{G}(B,C)$ — funkcyę Greena wewnętrzną w stosunku do kuli (Σ); przez $\dfrac{d\mathfrak{G}(B,C)}{dN_z}$, funkcyę pochodną funkcyi $\mathfrak{G}(B,C)$, uważanej za funkcyę spółrzędnych punktu C, w stosunku do normalnej, do kuli (Σ) do wnętrza jej skierowanej i przez punkt C jej powierzchni przeprowadzonej; przez ds — punktowi C powierzchni kuli (Σ), odpowiadający element powierzchniowy tej kuli, Przyjmijmy chwilowo punkt P za początek spółrzędnych prostokątnych x, y, z punktu B, skierowując oś z wzdłuż normalnej do powierzchni (S) do wnętrza obszaru (D) i uważajmy symbol:

$$D_{\overline{PB}}\, G(A, B), \tag{4}$$

określając symbol ten równością następującą:

$$D_{PB}\, G(A, B) = \left\{ \frac{\partial}{\partial z} G(A, B) \right\}_{\substack{x=0 \\ y=0}} .$$

Łatwo stwierdzimy, opierając się na wzorze (3) i na nierówności (2), że wielkość, którą przedstawia symbol (4), zmierza do oznaczonej granicy w razie, kiedy odcinek PB zmierza do zera. Zatem funkcya $G(A, B)$, uważana za funkcyę punktu B, posiada oznaczoną pochodną

$$\frac{dG(A, P)}{dN_p}, \tag{5}$$

wzdłuż normalnej do powierzchni (S) w punkcie P, i pochodna ta równa się wspomnianej wyżej granicy wyrażenia (4).

Pozostaje więc tylko do uzasadnienia ciągłość pochodnej (5).

Zwracając się ponownie do wzoru (3) i do nierówności (2), okażemy bez trudności, że do każdej liczby dodatniej ε, dowolnie małej, byle od zera odmiennej, możemy zawsze dobrać taką, od zera odmienną i od położenia punktu P na powierzchni σ n i e z a l e ż n ą długość δ, żeby nierówność:

$$\overline{PB} < \delta,$$

pociągała za sobą nierówność:

$$\left| D_{\overline{PB}}\, G(A, B) - \frac{dG(A, P)}{dN_p} \right| < \varepsilon,$$

jakiekolwiek byłoby położenie punktu P na powierzchni (σ). Z drugiej strony możemy bez pokonywania poważniejszych trudności dowieść, że dostawy kierunkowe normalnej do powierzchni (σ) są funkcyami ciągłemi spółrzędnych jej podnóża. Stąd zaś łatwo już wywnioskujemy, że wyrażenie (4), przy stałej i dostatecznie małej wartości odcinka $\overline{PB}$, jest funkcyą ciągłą spółrzędnych punktu P.

Uzyskane wyniki możemy streścić w sposób następujący: Wyrażenie (4) jest funkcyą ciągłą spółrzędnych punktu P i zmierza jednostajnie do wyrażenia (5) w razie, kiedy odcinek $\overline{PB}$ zmierza do zerá, a punkt P nie wychodzi z części (σ) powierzchni (S).

Z tego zaś wnosimy, że wyrażenie (5) jest funkcyą ciągłą spółrzędnych punktu P, o ile punkt ten nie wychodzi z części (σ) powierzchni (S).

Ostatecznie dowiedliśmy w zupełności twierdzenia, o które chodziło, zakładając tylko istnienie funkcyi Greena i bynajmniej nie wchodząc w to, jaką metodą okoliczność ta została uzasadniona.

Opierając się na uzyskanym wyniku i korzystając w stosowny sposób z nierówności (2) i ze wzoru (3), moglibyśmy łatwo uzasadnić w postaci uzupełnionej wszystkie klasyczne twierdzenia z teoryi funkcyi Greena.

W odczycie tym rozważaliśmy obszary trójwymiarowe, ale metoda, którą wyłożyliśmy, oczywiście może także być zastosowana do funkcyi Greena w przypadku obszarów dwuwymiarowych.