St. GUZEL.

Dowód elementarny pewnego twierdzenia z analitycznej teoryi liczb.

Celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie drogą elementarną nierówności:

$$(1) \qquad \left| \frac{\tau(1)+\tau(2)+\ldots\ldots+\tau(n)}{n} - \frac{\theta(1)+\theta(2)+\ldots\ldots+\theta(n)}{n} \right| < \frac{4}{\sqrt{n}},$$

gdzie $\tau(n)$ oznacza liczbę rozkładów liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, zaś $\theta(n)$—liczbę dzielników liczby n.

Z nierówności tej wyprowadzamy bezpośrednio wniosek, iż przy wzrastaniu liczby n lewa jej strona zmierza do zera, co p. Sierpiński wyraża w ten sposób:

„Wartości średnie funkcyj $\tau(n)$ i $\theta(n)$ są sobie równe“ [1].

Dla dowodu nierówności (1) wyjdziemy ze wzorów:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \tau(n) = 2 \sum_{n>0}^{n\leqslant x} (-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} E\frac{x}{n}, \\ T(x) &= \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \theta(n) = \sum_{n>0}^{n\leqslant x} E\frac{x}{n}, \end{aligned}$$

których wywód elementarny czytelnik znajdzie w zacytowanym już artykule p. Sierpińskiego.

---

[1]) W. Sierpiński. „O rozkładach liczb całkowitych na różnicę dwóch kwadratów“. Patrz wyżej Sprawozdanie str. 107.

Obliczając różnicę $\varphi(x) - T(x)$ na mocy wzorów (2), po łatwej redukcyi otrzymamy:

$$(3) \qquad \varphi(x) - T(x) = \sum_{n>0}^{n \leqslant x} a_n E \frac{x}{n},$$

gdzie spółczynnik $a_n = -3$ dla liczb n parzystych, lecz niepodzielnych przez 4, oraz $a_n = 1$ dla wszystkich innych całkowitych n.

Sumę (3) możemy jeszcze przepisać w postaci:

$$(4) \qquad \varphi(x) - T(x) = \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x}{4}} s_k,$$

oznaczając przez skrócenie:

$$s_k = E\frac{x}{4k+1} - 3E\frac{x}{4k+2} + E\frac{x}{4k+3} + E\frac{x}{4k+4}.$$

Otrzymaną sumę (4) przekształcimy jeszcze w sposób następujący: podzielmy wszystkie składniki tej sumy na dwie klasy, zaliczając do klasy pierwszej wszystkie te składniki, dla których $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}$, do drugiej zaś—wszystkie pozostałe, t. j. te, dla których $\sqrt{\frac{x}{4}} < k < \frac{x}{4}$. Wzór (4) przyjmie zatem postać:

$$(5) \qquad \varphi(x) = T(x) + \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}} s_k + \sum_{k > \sqrt{\frac{x}{4}}}^{k \leqslant \frac{x}{4}} s_k.$$

Uważajmy pierwszy składnik sumy (5), a więc sumę:

$$(6) \qquad \sum_{k \geqslant 0}^{h \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}} s_k.$$

Liczba wszystkich składników tej sumy jest $E\left(\sqrt{\frac{x}{4}} + 1\right)$, a zatem nie większa od liczby $\frac{\sqrt{x}}{2} + 1$.

Podstawmy w każdym takim składniku s_k zamiast $E\frac{x}{4k+1}$, $E\frac{x}{4k+3}$ i $E\frac{x}{4k+4}$ odpowiednio same liczby $\frac{x}{4k+1}$, $\frac{x}{4k+3}$ i $\frac{x}{4k+4}$. Suma błędów, jakie w takim razie popełnimy, będzie dla każdego składnika liczbą mniejszą od 3; ponieważ zaś wszystkich składników jest nie więcej niż $\frac{\sqrt{x}}{2}+1$, więc ogólny błąd będzie napewno mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)$. Jeżeli teraz to samo uczynimy z pozostałemi jeszcze symbolami, to jest zamiast $E\frac{x}{4k+2}$ podstawimy same liczby $\frac{x}{4k+2}$, to z łatwością zauważymy, iż błąd popełniony w każdym składniku będzie również mniejszy od 3, lecz znak jego będzie wprost przeciwny. Dochodzimy więc do wniosku, że i w tym razie błąd ogólny będzie mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)$, lecz o znaku przeciwnym. Oba powyższe błędy będą się eczywiście znosiły, przynajmniej częściowo, tak, iż podstawiając zamiast sumy (6) sumę:

$$\sum_{k\geqslant 0}^{k<\sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{x}{4k+1}-\frac{3x}{4k+2}+\frac{x}{4k+3}+\frac{x}{4k+4}\right),$$

popełnimy błąd w każdym razie mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+1\right)$.

Ostatnią sumę napiszemy w postaci:

$$x\sum_{k\geqslant 0}^{k<\sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{3}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right). \tag{7}$$

Dla dalszego przekształcenia sumy (7) użyjemy tożsamości:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{3}{4k+2}+\frac{1}{4k+3}+\frac{1}{4k+4}\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(2m+2k+1)(2m+2k+2)},$$

którą łatwo udowodnić zakładając, iż jest prawdziwa przy pewnem ($m \geqslant 1$), i że w takim razie prawdziwą być musi przy $m+1$.

Dalej, zważywszy, iż suma, znajdująca się po prawej stronie napisanej tożsamości, zawiera m składników dodatnich, a wartość każdego z nich jest mniejszą od $\frac{1}{4m^2}$, dochodzimy do wniosku, że:

$$0 < \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right) < \frac{1}{4m}.$$

Zakładając we wzorze powyższym $m = E\left(\sqrt{\frac{x}{4}} + 1\right)$, a więc $\sqrt{\frac{x}{4}} < m \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}} + 1$, czyli $m-1 \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}$, otrzymamy:

$$0 < \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+4}\right) < \frac{1}{4m} < \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

skąd:

$$0 < x\sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}}\left(\frac{1}{4k+1} - \frac{3}{4k+2} + \frac{1}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right) < \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Zestawiając otrzymany rezultat z tem, cośmy wykazali poprzednio, t. j. że błąd, popełniony przez podstawienie sumy (7) zamiast (6) jest mniejszy od liczby $3\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right)$, wnosimy, że wartość bezwzględna sumy (6) jest mniejsza od liczby:

$$3\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + 1\right) + \frac{\sqrt{x}}{2},$$

czyli:

$$\left|\sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \sqrt{\frac{x}{4}}} s_k\right| < 2\sqrt{x} + 3. \tag{8}$$

Uważajmy teraz drugi składnik sumy (5), t. j. sumę:

$$\sum_{k > \sqrt{\frac{x}{4}}}^{k \leqslant \frac{x}{4}} s_k. \tag{9}$$

Oczywiście zachodzą tu nierówności:

$$\frac{x}{4k+1} > \frac{x}{4k+2} > \frac{x}{4k+3} > \frac{x}{4k+4} + \frac{x}{4k+5},$$

skąd już bezpośrednio wynika:

$$(10) \qquad E\frac{x}{4k+1} \geqslant E\frac{x}{4k+2} \geqslant E\frac{x}{4k+3} > E\frac{x}{4k+4} \geqslant E\frac{x}{4k+5}.$$

Jeślibyśmy mieli:

$$E\frac{x}{4k+1} = E\frac{x}{4k+5}, \quad \text{czyli } E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5} = 0,$$

to wszystkie nierówności (10) stałyby się wówczas równościami, i, jak to łatwo zauważyć, cały odpowiedni składnik s_k musiałby być zerem. Stąd wypada, iż składnik ten może być od zera odmienny tylko wtedy, jeżeli zachodzi nierówność:

$$E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5} > 0.$$

Z drugiej strony mamy:

$$\frac{x}{4k+1} - \frac{x}{4k+5} = \frac{4x}{(4k+1)(4k+5)} < \frac{x}{4k^2},$$

lecz dla sumy (9):

$$k > \sqrt{\frac{x}{4}}, \quad \text{skąd} \quad \frac{x}{4k^2} < 1, \quad \text{a zatem:}$$

$$0 < \frac{x}{4k+1} - \frac{x}{4k+5} < 1.$$

Jeżeli jednak różnica pomiędzy dwiema liczbami $a—b$ jest dodatnia i mniejsza od jedności, to różnica $Ea—Eb$ może być tylko albo zerem, albo jednością.

Zatem różnica:

$$E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5},$$

skoro ma być większa od zera, musi się równać jedności:

$$E\frac{x}{4k+1} - E\frac{x}{4k+5} = 1.$$

Oznaczmy $E\frac{x}{4k+5} = a$, wtedy $E\frac{x}{4k+1} = a+1$.

Dla pozostałych wyrazów składnika s_k na mocy nierówności (10) mogą zachodzić tylko cztery różne kombinacye, jak to wskazuje następująca tabliczka:

	$E\frac{x}{4k+1}$	$E\frac{x}{4k+2}$	$E\frac{x}{4k+3}$	$E\frac{x}{4k+4}$	$E\frac{x}{4k+5}$
1)	$a+1$	$a+1$	$a+1$	$a+1$	a
2)	$a+1$	$a+1$	$a+1$	a	a
3)	$a+1$	$a+1$	a	a	a
4)	$a+1$	a	a	a	a

W pierwszym przypadku odpowiedni składnik $s_k = 0$, w drugim: $s_k = -1$, w trzecim: $s_k = -2$ i w czwartym: $s_k = +1$; zatem jego wartość bezwzględna nigdy nie przenosi liczby 2.

Przypuśćmy, iż w sumie (9) znajduje się p składników odmiennych od zera. Ponieważ wartość bezwzględna każdego z nich nie przenosi liczby 2, więc wartość bezwzględna całej sumy nie może być większą od liczby $2p$.

Oznaczmy pierwsze wyrazy wszystkich składników s_k odmiennych od zera, wzięte w ich kolejnym porządku odpowiednio przez:

$$E\frac{x}{4k_1+1}, E\frac{x}{4k_2+1}, E\frac{x}{4k_3+1}, \ldots, E\frac{x}{4k_p+1}.$$

Oczywiście przy tych założeniach zachodzić muszą następujące nierówności:

$$
(11)\qquad
\begin{array}{lll}
k_1 < k_2\,, & \text{a więc} & k_2 \geqslant k_1+1 \\
k_2 < k_3\,, & \text{„} & k_3 \geqslant k_2+1 \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\
k_{p-1} < k_p\,, & \text{„} & k_p \geqslant k_{p-1}+1
\end{array}
$$

Dalej mieć będziemy p równości (na mocy założenia, że uważane składniki s_k są odmienne od zera):

$$
\begin{aligned}
&E\frac{x}{4k_1+1} - E\frac{x}{4k_1+5} = 1\,,\\
&E\frac{x}{4k_2+1} - E\frac{x}{4k_2+5} = 1\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&E\frac{x}{4k_p+1} - E\frac{x}{4k_p+5} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Dodajmy do siebie odpowiedniemi stronami wszystkie napisane równości, przedstawiając ich sumę w formie następującej:

$$
E\frac{x}{4k_1+1} - \left(E\frac{x}{4(k_1+1)+1} - E\frac{x}{4k_2+1}\right) - \left(E\frac{x}{4(k_2+1)+1} - \frac{x}{4k_3+1}\right) - \cdots\cdots
$$

$$
\cdots\cdots - \left(E\frac{x}{4(k_{p-1}+1)+1} - E\frac{x}{4k_p+1}\right) - E\frac{x}{4k_p+5} = p\,.
$$

Na mocy nierówności (11) oraz (10) wnosimy, iż żadna z różnic, stojących w nawiasach po lewej stronie otrzymanej równości, ujemną być nie może, zaś ostatni wyraz $E\dfrac{x}{4k_p+5}$ jest na pewno dodatni.

Stąd już bezpośrednio wypada, że:

$$
E\frac{x}{4k_1+1} > p.
$$

Lecz k_1 będąc jedną z wartości k w sumie (9), musi spełniać warunek $k_1 > \sqrt{\frac{x}{4}}$, zatem:

$$E\frac{x}{4k_1+1} < \frac{x}{4k_1} < \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Zestawiając ostatnie dwie nierówności, zauważymy z łatwością, iż:

$$p < \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Wykazaliśmy jednak poprzednio, że wartość bezwzględna sumy (9) nie może być większa od $2p$, a zatem:

$$\left|\sum_{k > \sqrt{\frac{x}{4}}}^{k \leqslant \frac{x}{4}} s_k\right| < \sqrt{x}. \tag{12}$$

Porównywając ze sobą wzory (5), (8) i (12), dochodzimy ostatecznie do wniosku, że:

$$|\varphi(x) - T(x)| < 3\sqrt{x} + 3.$$

Ponieważ dla $x \geqslant 9$, $\sqrt{x}$ jest większy od 3, więc możemy ostatnią nierówność przepisać jeszcze w postaci:

$$|\varphi(x) - T(x)| < 4\sqrt{x}, \quad \text{dla} \quad x \geqslant 9;$$

że wzór ten jest prawdziwy i dla $x < 9$, można sprawdzić bezpośrednio.

Zakładając w powyższej nierówności na x wartość całkowitą n i dzieląc obie jej strony przez n, otrzymamy z łatwością nierówność:

$$\left|\frac{\varphi(n)}{n} - \frac{T(n)}{n}\right| < \frac{4}{\sqrt{n}},$$

którą zamierzaliśmy właśnie wyprowadzić.

Ażeby uwidocznić zachowanie się funkcyj $\varphi(n)$ i $T(n)$, podajemy poniżej tablicę wartości tych funkcyj dla liczb nie przewyższających 10000, w odstępach co 10, co 100 i co 1000.

Tablica wartości funkcyj $\varphi(n)$ i $T(n)$.

n	$\varphi(n)$	$T(n)$	$\varphi(n) - T(n)$
10	26	27	-1
20	64	66	-2
30	106	111	-5
40	160	158	$+2$
50	206	207	-1
60	258	261	-3
70	308	312	-4
80	368	368	0
90	418	425	-7
100	484	482	$+2$
200	1096	1098	-2
300	1766	1767	-1
400	2472	2468	$+4$
500	3188	3190	-2
600	3940	3944	-4
700	4700	4700	0
800	5484	5482	$+2$
900	6280	6276	$+4$
1000	7062	7069	-7
2000	15520	15518	$+2$
3000	24492	24496	-4
4000	33814	33805	$+9$
5000	43372	43376	-4
6000	53154	53141	$+13$
7000	63070	63071	-1
8000	73150	73149	$+1$
9000	83364	83358	$+6$
10000	93672	93668	$+4$