W. SIERPIŃSKI.

O rozkładach liczb całkowitych na różnicę dwóch kwadratów.[1]

I.

§ 1. Uważajmy jakąkolwiek liczbę całkowitą n (do liczb całkowitych zaliczać będziemu tu, jak też wszędzie dalej, nie tylko dodatnie ale i ujemne i równe zeru); postarajmy się wyznaczyć wszystkie rozkłady tej liczby na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, t. j. wszystkie układy (μ,ν) liczb całkowitych μ i ν, spełniających rownanie:

$$n = \mu^2 - \nu^2. \tag{1}$$

Załóżmy najprzód, że liczba n jest zerem. Równanie (1) przyjmie wówczas postać:

$$\mu^2 - \nu^2 = 0\,,$$

i posiadać będzie nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych: na to, aby liczby całkowite μ i ν spełniały napisane przed chwilą równanie, potrzeba i wystarcza, iżby liczby te albo były sobie równe, albo też różniły się tylko co do znaku.

---

[1]) Niniejszy ustęp z teoryi liczb opracowany jest w ten sposób, iż dla zrozumienia jego wystarcza znajomość Matematyki elementarnej; jedynie ostatnie trzy paragrafy wymagają pewnych wiadomości ogólnych z Rachunków wyższych i specyalnych—z analitycznej teoryi liczb; wrazie jednak opuszczenia tych końcowych paragrafów, czytelnik też otrzyma pewną całość.

Przypadek $n=0$ możemy więc uważać za zbadany i jako taki wyłączyć z dalszych naszych rozważań.

Uważajmy więc jakąkolwiek liczbę całkowitą n, odmienną od zera. Nie uszczuplając bynajmniej ogólności naszych rozważań możemy założyć, że n jest liczbą dodatnią, każdemu bowiem rozkładowi (μ, ν) liczby $+n$ na różnicę dwóch kwadratów, odpowiada określony w zupełności rozkład (ν, μ) liczby $-n$ i odwrotnie; znając więc wszystkie rozkłady liczby dodatniej $+n$, znamy przez to i wszystkie rozkłady liczby ujemnej $-n$.

§ 2. Nazywać będziemy dalej dzielnikiem liczby dodatniej n każdą liczbę dodatnią d, przez którą n się dzieli bez reszty; wobec przyjętego określenia, do dzielników liczby n zaliczamy zarówno 1 jak też i samą liczbę n. Liczbę $\delta = \frac{n}{d}$ nazywać będziemy dla d dzielnikiem dopełniającym.

Uważajmy jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią n i przypuśćmy, że liczby całkowite μ i ν spełniają równanie (1). Równanie to możemy przepisać w postaci:

$$n = (\mu - \nu)(\mu + \nu), \tag{2}$$

skąd widać, że jedna z liczb $\mu - \nu$ i $\nu - \mu$ (mianowicie ta z nich, która jest dodatnią, a jedna nią będzie, gdyż $n \neq 0$) musi być dzielnikiem liczby n. Mamy więc:

$$\mu - \nu = \pm d, \tag{3}$$

gdzie dzielnik d liczby n, a również znak, jaki przed nim postawić należy, są przez liczby μ i ν określone w zupełności. Możemy więc powiedzieć, że *każdy rozkład liczby n na różnicę dwóch kwadratów należy do pewnego jej dzielnika.*

Np. rozkład (7, 5) liczby 24 należy do dzielnika 2: rozkład (—5, 3) liczby 16 należy do dzielnika 8; rozkład (—6, 0) liczby 36 — do dzielnika 6 i t. p.

§ 3. Zapytamy teraz, czy do każdego dzielnika liczby n należą rozkłady i ile mianowicie.

Przypuśćmy, że (μ, ν) oznacza jakikolwiek rozkład liczby (całkowitej dodatniej) n na różnicę dwóch kwadratów, należący do jej dziel-

nika d. Liczby całkowite μ i ν muszą zatem spełniać równania (2) i (3), z których oznaczając $\frac{n}{d} = \delta$, znajdziemy z łatwością:

$$(4) \qquad \mu = \pm \frac{\delta + d}{2}, \quad \nu = \pm \frac{\delta - d}{2},$$

przyczem znaki trzeba będzie w obu wzorach wziąć albo jednocześnie górne, albo też jednocześnie dolne.

Liczby μ i ν są całkowite, wnosimy więc na mocy wzorów (4), że liczby $\delta + d$ oraz $\delta - d$ muszą być obie parzyste. Będzie to wtedy i wtedy tylko, jeżeli dzielniki d i δ będą oba parzyste, albo też oba nieparzyste.

Dwa więc tylko rozkłady:

$$\left(\frac{\delta + d}{2}, \frac{\delta - d}{2}\right) \text{ oraz } \left(-\frac{\delta + d}{2}, \frac{d - \delta}{2}\right)$$

i to tylko w razie jednoczesnej parzystości lub nieparzystości liczb d i δ mogą należeć do dzielnika d. Że w razie zachowania tego warunku oba wypisane układy (μ, ν) istotnie będą rozkładami liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, należącemi do dzielnika d, przekonamy się z łatwością, zważywszy, iż będą to układy liczb całkowitych, spełniających równania (1) i (3).

A więc: jeżeli liczby d i $\delta = \frac{n}{d}$ są obie parzyste, lub obie nieparzyste, do dzielnika d należą dokładnie dwa rozkłady liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych; jeżeli jedna z liczb d i δ jest parzystą, druga nieparzystą — niema rozkładów, należących do dzielnika d.

P r z y k ł a d. Załóżmy $n = 100$. Dzielnikami tej liczby są:

1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100;

jedynie do dzielników 2, 10 i 50 należą rozkłady, a mianowicie:

do dzielnika $d = 2$ $(\delta = 50)$ rozkłady $(+26, +25)$ i $(-26, -24)$,
„ „ $d = 10$ $(\delta = 10)$ „ $(+10, +0)$ i $(-10, -0)$,
„ „ $d = 50$ $(\delta = 2)$ „ $(+26, +24)$ i $(-26, -24)$

Ponieważ każdy rozkład musi należeć do pewnego dzielnika (§ 2), więc wnosimy, że, oprócz wypisanych wyżej, niema innych rozkładów liczby 100 na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych.

§ 4. Załóżmy, że n jest liczbą nieparzystą, Wszystkie dzielniki liczby n są wtedy nieparzyste; liczby d i δ spełniają więc zawsze wiadomy warunek: do każdego przeto dzielnika liczby nieparzystej należą dokładnie dwa rozkłady, skąd:

T w i e r d z e n i e. Liczba rozkładów każdej liczby nieparzystej na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych równa jest podwójnej liczbie dzielników rozkładanej liczby.

Oznaczmy symbolem $\tau(n)$ liczbę wszystkich różnych rozkładów liczby n na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych, symbolem $\theta(n)$ — liczbę dzielników liczby n; na mocy dowiedzionego twierdzenia, przy wszelkiem nieparzystem n mamy wzór.

$$\tau(n) = 2\,\theta(n). \tag{5}$$

Jako szczególny przypadek naszego twierdzenia, otrzymujemy:

Każda liczba pierwsza nieparzysta posiada dokładnie 4 rozkłady na różnicę dwóch kwadratów.

Twierdzenie to może być odwrócone: każda liczba nieparzysta, posiadająca dokładnie 4 rozkłady na różnicę dwóch kwadratów, jest liczbą pierwszą.

W samej rzeczy, równanie:

$$\tau(n) = 2\,.\,2,$$

wobec wzoru (5) dla liczb nieparzystych, daje:

$$\theta(n) = 2,$$

skąd wniosek, iż n jest liczbą pierwszą.

§ 5. Przypuśćmy teraz, że n oznacza liczbę parzystą. Ponieważ $d\delta = n$, więc dzielniki d i δ nie mogą być oba jednocześnie nieparzyste. Jeżeli więc $\tau(n) \neq 0$, to muszą istnieć dzielniki d, dla których liczby d i δ są obie parzyste, co znów może mieć miejsce tylko w razie podzielności liczby n przez cztery. Stąd twierdzenie:

Dla liczb n parzystych, lecz niepodzielnych przez cztery (t. j. dla podwojonych liczb nieparzystych).

(6) $$\tau(n) = 0.$$

Załóżmy więc teraz, że liczba n jest podzielna przez cztery, a więc rozkłada się na czynniki pierwsze:

$$n = 2^{a} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_k^{a_k},$$

gdzie a oznacza liczbę całkowitą, większą od jedności, zas $a_i (i=1,2,\ldots,k)$ są liczby całkowite dodatnie.

Każdy dzielnik liczby n ma postać:

$$d = 2^{\lambda} p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots\ldots p_k^{\lambda_k},$$

gdzie liczby $\lambda, \lambda_1, \ldots \lambda_k$ mogą przyjmować wartości całkowite, zawart odpowiednio w granicach:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant a,\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant a_1,\ 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant a_2, \ldots\ldots\ 0 \leqslant \lambda_k \leqslant a_k.$$

Aby dzielniki d i δ były oba parzyste, trzeba i wystarcza, iżby było:

$$1 \leqslant \lambda \leqslant a - 1,$$

skąd wnosimy, że dzielników d, spełniających ten warunek, będzie:

$$(a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1).$$

Będzie więc:

(7) $$\tau(n) = 2(a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1).$$

Oznaczmy przez $\theta'(n)$ liczbę wszystkich nieparzystych dzielników liczby n, przez $\theta''(n)$—liczbę wszystkich jej dzielników parzystych. Będziemy oczywiście mieli:

$$\theta'(n) = (a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1),$$

oraz:

$$\theta''(n) = a(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_k+1),$$

skąd:

$$2[\theta''(n) - \theta'(n)] = \tau(n).$$

Ponieważ $a > 1$, więc $\theta''(n) > \theta'(n)$; możemy przeto napisać:

(8) $$\tau(n) = 2|\theta''(n) - \theta'(n)|,$$

oznaczając przez $|x|$ wartość bezwzględną liczby x.

§ 6. Wzór (8) wyprowadziliśmy, zakładając, że liczba n jest podzielna przez cztery; z łatwością jednak można okazać, że jest on prawdziwy ogólnie.

Gdyby bowiem liczba n była parzysta, lecz niepodzielna przez cztery, zachodziłby wzór (6); lecz wtedy znaleźlibyśmy z łatwością $\theta'(n)=\theta''(n)$, każdemu bowiem dzielnikowi nieparzystemu liczby n odpowiadałby dwa razy większy dzielnik parzysty tej liczby, i odwrotnie: każdemu parzystemu dzielnikowi—dwa razy mniejszy nieparzysty.

W razie nieparzystego n wszystkie dzielniki tej liczby byłyby nieparzyste: mielibyśmy więc $\theta''(n)=0$ i $\theta'(n)=\theta(n)$, przyczem $\theta(n)>0$; wzór (7) zamieniłby się na wzór (5).

Udowodniliśmy więc, iż liczba rozkładów każdej liczby całkowitej dodatniej n na różnicę dwóch kwadratów równa się podwojonej różnicy bezwzględnej pomiędzy liczbą wszystkich parzystych a liczbą wszystkich nieparzystych dzielników liczby n.

Zauważymy wreszcie, że aby wzór (7) był prawdziwy całkiem ogólnie (t. j. nietylko dla $a>1$, ale i dla $a=1$ oraz $a=0$), należy go tylko przepisać w postaci:

$$\tau(n)=2\,.\,|a-1|\,.\,(a_1+1)\,(a_2+1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(a_k+1). \tag{7a}$$

Wzór ten pozwala obliczać z łatwością wartość funkcyi $\tau(n)$, skoro mamy rozkład liczby n na czynniki pierwsze. Np. dla liczby

$$25920=2^6.\,3^4.\,5,$$

znajdujemy:

$$\tau(n)=2\,.\,5\,.\,5\,.\,2=100;$$

możnaby okazać, że liczba 25920 jest najmniejszą liczbą, dającą dokładnie sto rozkładów na różnicę dwóch kwadratów; istnieją jednak liczby mniejsze od niej, posiadające więcej niż sto rozkładów: np. liczba

$$20160=2^6.\,3^2.\,5\,.\,7$$

daje $2\,.\,5\,.\,3\,.\,2\,.\,2=120$ rozkładów.

Ze wzoru (7a) wynika jeszcze, iż $\tau(n)=0$ tylko przy $a=1$: liczby parzyste, niepodzielne przez cztery, są więc jedynemi liczbami, nie rozkładającemi się na różnicę dwóch kwadratów.

§ 7. Załóżmy, że liczba n nie jest kwadratem zupełnym; wówczas każdy jej dzielnik będzie sie różnił od swego dopełniającego; wszystkie dzielniki liczby n możemy podzielić na pary, zaliczając do każdej wzajemnie dopełniające się dzielniki d i δ.

Jeżeli do dzielnika d należą rozkłądy liczby n, to należeć będą również do dzielnika δ i odwrotnie; wszystkie rozkłady liczby n podzielić więc możemy na czwórki:

$$\left(\frac{\delta+d}{2}, \frac{\delta-d}{2}\right), \left(-\frac{\delta+d}{2}, \frac{d-\delta}{2}\right), \left(\frac{d+\delta}{2}, \frac{d-\delta}{2}\right) \text{ i } \left(-\frac{d+\delta}{2}, \frac{\delta-d}{2}\right);$$

jak widzimy, rozkłady (μ, ν), należące do jednej z tej samej czwórki, różnią się tylko co do znaków liczb μ i ν.

Ponieważ $d\delta = n$ i $d \neq \delta$, więc jedna z liczb d i δ, np. d musi być mniejsza od $\sqrt{n}$. Wówczas będzie $\delta > \sqrt{n}$ i pierwszy rozkład napisanej wyżej czworki będzie dodatni. Aby otrzymać wszystkie rozkłady liczby n, wystarczy oczywiście wyznaczyć po jednym z każdej czwórki, np. wyznaczyć z każdej rozkład dodatni. Otrzymujemy stąd następujące prawidło praktyczne dla wyznaczania wszystkich rozkładów liczby n, nie będącej kwadratem zupełnym:

Należy wypisać wszystkie, mnjejsze od $\sqrt{n}$ dzielniki d liczby n, do których należą rozkłady (a więc dzielniki jednocześnie parzyste lub nieparzyste ze swemi dopełniającemi), i dla każdego z nich wyznaczyć rozkład dodatni (μ, ν), kładąc:

$$\mu = \frac{\delta+d}{2}, \quad \nu = \frac{\delta-d}{2};$$

z każdego otrzymanego w ten sposób rozkładu należy utworzyć cztery rozkłady:

$$(\mu, \nu), \ (-\mu. -\nu), \ (\mu, -\nu), \ (-\mu, \nu),$$

różniące się tylko co do znaków.

P r z y k ł a d. Załóżmy $n = 1000$. Dzielnikami $d < \sqrt{1000}$, do których należą rozkłady, będą: 2, 4, 10 i 20; odpowiedniemi rozkładami dodatniemi będą:

$$(251, 249), \ (127, 123), \ (55, 45) \text{ i } (35, 15);$$

wszystkich rozkładów będzie zatem 16, co wynika również ze wzoru (7).

U w a g a. Jako wniosek uboczny z naszych rozważań otrzymujemy, iż liczba $\tau(n)$ jest zawsze podzielna przez 4, jeżeli n jest nie kwadratem zupełnym.

Jeżeli n jest kwadratom zupełnym, to oprócz wyznaczonych w sposób opisany wyżej rozkładów dodatnich, z których każdy tworzy czwórkę, będziemy mieli jeszcze dwa rozkłady:

$$(\sqrt{n},\ 0) \text{ i } (-\sqrt{n},\ 0),$$

z których oczywiście wystarczy podać tylko pierwszy. Liczba $\tau(n)$ będzie w tym razie parzystą, lecz niepodzielną przez cztery.

Niżej podajemy tablicę wszystkich rozkładów nie ujemnych dla liczb mniejszych od sta, a następnie tablicę wartości funkcyi $\tau(n)$ dla $n < 100$.

TABLICA ROZKŁADÓW

liczb całkowitych < 100 na różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych $\geqslant 0$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1,0		2,1	2,0	3,2		4,3	3,1	5,4 3,0
1		6,5	4,2	7,6		8,7 4,1	5,3 4,0	9,8		10,9
2	6,4	11,10 5.2		12,11	7,5 5,1	13,12 5,0		14,13 6,3	8,6	15,14
3		16,15	9,7 6,2	17,16 7,4		18,17 6,1	10,8 6,0	19,18		20,19 8,5
4	11,9 7,3	21,20		22,21	12,10	23,22 9,6 7,2		24,23	13,11 8,4 7,1	25,24 7,0
5		26,25 10,7	14,12	27,26		28,27 8,3	15,13 9,5	29,28 11,8		30,29
6	16,14 8,2	31,30		32,31 12, 9 8, 1	17,15 10, 6 8, 0	33,32 9, 4		34,33	18,16	35,34 13,10
7		36,35	19,17 11, 7 9, 3	37,36		38,27 14,11 10, 5	20,18	39,28 9, 2		40,39
8	21,19 12, 8 9, 1	41,40 15,12 9, 0		42,41	22,20 10, 4	43,42 11, 6		44,43 16,13	23,21 13, 9	45,44
9		46,45 10, 3	24,22	47,46 17,14		48,47 12, 7	25,23 14,10 11, 5 10, 2	49,48		50,49 18,15 10, 1

Tablica wartości funkcyi $\tau(n)$ dla $n < 100$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	∞	2	0	4	2	4	0	4	4	6
1	0	4	4	4	0	8	6	4	0	4
2	4	8	0	4	8	6	0	8	4	4
3	0	4	8	8	0	8	6	4	0	8
4	8	4	0	4	4	12	0	4	12	6
5	0	8	4	4	0	8	8	8	0	4
6	8	4	0	12	10	8	0	4	4	8
7	0	4	12	4	0	12	4	8	0	4
8	12	10	0	4	8	8	0	8	8	4
9	0	8	4	8	0	8	16	4	0	12

Jak widać z tej tablicy, z liczb pierwszej setki największą liczbę rozkładów daje liczba 96, dla której $\tau(96) = 16$; dla innych liczb, mniejszych od stu mamy stale $\tau(n) \leqslant 12$; niema zaś w pierwszej setce liczby, któraby dawała dokładnie 14 rozkładów: najmniejszą taką liczbą jest dopiero $n = 256$.

II.

§ 8. Zajmijmy się obliczaniem sumy:

$$\varphi(x) = \sum_{n>0}^{n\leqslant x} \tau(n), \qquad (x > 0)$$

czyli sumy:

$$\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \ldots\ldots + \tau(Ex),$$

gdzie oznaczamy symbolem Ex największą liczbę całkowitą, nie przewyższającą liczby x.

Ponieważ $\tau(n)$ uważać można jako liczbę rozwiązań równania:

$$n = \mu^2 - \nu^2$$

w liczbach całkowitych μ, ν, więc sumę $\varphi(x)$ uważać możemy jako liczbę całkowitych rozwiązań nierówności:

$$(1) \qquad 0 < \mu^2 - \nu^2 \leqslant x.$$

Jeżeli liczby całkowite μ i ν spełniają napisane przed chwilą nierówności, to musi być:

$$\mu^2 > \nu^2,$$

skąd:

$$|\mu| > |\nu|,$$

a że obie liczby $|\mu|$ i $|\nu|$ są całkowite, więc ostatnia nierówność równoważna jest nierówności:

$$|\mu| \geqslant |\nu| + 1,$$

skąd, podnosząc obie strony do kwadratu:

$$\mu^2 \geqslant \nu^2 + 2|\nu| + 1,$$

czyli:

$$2|\nu| + 1 \leqslant \mu^2 - \nu^2,$$

a że na mocy nierówności (1) $\mu^2 - \nu^2 \leqslant x$, więc:

$$2|\nu| + 1 \leqslant x,$$

skąd:

$$(2) \qquad |\nu| \leqslant \frac{x-1}{2}.$$

A więc: jeżeli układ liczb całkowitych (μ, ν) spełnia nierówności (1), to liczba ν musi spełniać nierówność (2).

Wszystkie układy całkowite (μ, ν), spełniające nierówności (1) możemy podzielić na klasy, zaliczając do klasy K_n wszystkie układy (μ, ν), dla których ν ma jednę i tę samę wartość n. Wskaźnik n oczywiście może otrzymywać tylko wartości całkowite, spełniające nierówność

$$|n| \leqslant \frac{x-1}{2}.$$

Oznaczmy przez k_n liczbę układów klasy K_n: oczywiście będziemy mieli:

$$(3) \qquad \varphi(x) = \sum_{n \geqslant -\frac{x-1}{2}}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} k_n.$$

Obliczmy k_n: będzie to liczba różnych wartości całkowitych, jakie może przyjmować μ, iżby zachodziły nierówności:

$$0 < \mu^2 - n^2 \leqslant x,$$

czyli:

$$|n| < |\mu| \leqslant \sqrt{x+n^2}.$$

Biorąc pod uwagę określenie symbolu Ex, znajdziemy z łatwością, że $|\mu|$ przyjąć może dokładnie:

$$E\sqrt{x+n^2} - |n|$$

różnych wartości, a ponieważ pomiędzy niemi niema wartości zero (gdyż $|\mu| > |n| \geqslant 0$), więc każdej wartości na $|\mu|$ odpowiadać będą dwie różne wartości na $\mu (+|\mu|$ i $-|\mu|)$. Wnosimy stąd, iż:

$$(4) \qquad k_n = 2(E\sqrt{x+n^2} - |n|).$$

Ze wzoru tego wnosimy, iż $k_{-n} = k_n$, a więc sumę (3) możemy przedstawić w postaci:

$$\varphi(x) = k_0 + 2 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} k_n,$$

lub, na mocy wzoru (4):

$$\varphi(x) = 2E\sqrt{x} + 4 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} E\sqrt{x+n^2} - 4 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} |n|;$$

n jest liczbą dodatnią, możemy zatem w ostatniej sumie opuścić symbol wartości bezwzględnej. Na mocy znanych wzorów na postęp arytmetyczny, znajdziemy z łatwością:

$$\sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} n = \tfrac{1}{2} E \frac{x-1}{2} \cdot E \frac{x+1}{2},$$

tak, iż ostatecznie:

$$(5) \qquad \varphi(x) = 2E\sqrt{x} - 2E\frac{x-1}{2} \cdot E\frac{x+1}{2} + 4 \sum_{n>0}^{n \leqslant \frac{x-1}{2}} E\sqrt{x+n^2}.$$

§ 9. Na podstawie zależności pomiędzy funkcyami $\tau(n)$ i $\theta(n)$ wyprowadzimy jeszcze inny wzór na sumę $\varphi(x)$.

W tym celu, grupując osobno składniki $\tau(n)$, dla których n jest nieparzyste, osobno te, dla których n jest liczbą parzystą, lecz niepodzielną przez cztery, i wreszcie osobno te, dla których n jest wielokrotnością czterech, przedstawimy przedewszystkiem sumę $\varphi(x)$ w postaci:

$$(6) \qquad \varphi(x) = \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-1}{2}} \tau(2k+1) + \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-2}{4}} \tau(4k+2) + \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x}{4}} \tau(4k).$$

Na mocy wzoru (5) z rozdziału poprzedzającego, dla liczb nieparzystych mamy stale:

$$\tau(2k+1) = 2\theta(2k+1),$$

więc:

$$\sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-1}{2}} \tau(2k+1) = 2 \sum_{k \geqslant 0}^{k \leqslant \frac{x-1}{2}} \theta(2k+1).$$

Dla liczb parzystych, niepodzielnych przez 4, mamy wzór:

$$\tau(4k+2) = 0,$$

(zob. rozdz. I, wzór (6)), przeto:

$$\sum_{k\geqslant 0}^{k\leqslant \frac{x-2}{4}} \tau(4k+2) = 0.$$

Dla liczb podzielnych przez 4, a więc liczb:

$$4k = 2^{a}.\, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_m^{a_m},$$

gdzie $a \geqslant 2$, mamy wzór:

$$\tau(4k) = 2(a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_m+1);$$

jeżeli teraz zważymy, że liczba:

$$k = 2^{a-2}.\, p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots\ldots p_m^{a_m},$$

posiada

$$\theta(k) = (a-1)(a_1+1)(a_2+1)\ldots\ldots(a_m+1)$$

dzielników, to z łatwością znajdziemy:

$$\tau(4k) = 2\theta(k),$$

skąd:

$$\sum_{k\geqslant 0}^{k\leqslant \frac{x}{4}} \tau(4k) = 2 \sum_{k>0}^{k\leqslant \frac{x}{4}} \theta(k).$$

W ten sposób wzór (6) daje:

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k\geqslant 0}^{k\leqslant \frac{x-1}{2}} \theta(2k+1) + 2 \sum_{k>0}^{k\leqslant \frac{x}{4}} \theta(k).$$

Pierwszą z sum, stojących po prawej stronie napisanego wzoru, możemy jeszcze wyrazić inaczej, opierając się na tożsamości:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x} \theta(n) = \sum_{k\geqslant 0}^{k\leqslant \frac{x-1}{2}} \theta(2k+1) + \sum_{k>0}^{k\leqslant \frac{x}{2}} \theta(2k);$$

w ten sposób znajdziemy:

$$(7) \qquad \varphi(x) = 2\sum_{k>0}^{k\leqslant x} \theta(k) - 2\sum_{k>0}^{k\leqslant \frac{x}{2}} \theta(2k) + 2\sum_{k>0}^{k\leqslant \frac{x}{4}} \theta(k).$$

Pierwszą i trzecią z sum po prawej stronie potrafimy obliczyć, jeżeli będziemy umieli obliczyć sumę:

$$T(z) = \sum_{k>0}^{k\leqslant z} \theta(k) \qquad \text{dla } z>0.$$

Ponieważ $\theta(k)$ uważać można jako liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych, dodatnich m, n równania:

$$mn = k,$$

więc sumę $T(z)$ uważać możemy jaóo liczbę całkowitych dodatnich rozwiązań (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant z.$$

Przy każdem danem n (całkowitem, dodatniem, nie większem od z), m może przyjmować wartości całkowite:

$$0 < m \leqslant \frac{z}{n},$$

których jest dokładnie $E\frac{z}{n}$, przeto:

$$T(z) = \sum_{n>0}^{n\leqslant z} E\frac{z}{n}.$$

Obliczmy teraz sumę::

$$\sum_{k>0}^{k\leqslant \frac{x}{2}} \theta(2k),$$

którą uważać możemy jako liczbę wszystkich takich całkowitych, dodatnich rozwiązań (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant x,$$

dla których iloczyn mn jest liczbą parzystą.

Jeżeli n jest liczbą parzystą: $n = 2l$, to m może przyjmować wszystkie wartości całkowite:

$$0 < m \leqslant \frac{x}{2l},$$

których jest dokładnie $E\frac{x}{2l}$, w razie zaś nieparzystego $n = 2l+1$, m musi przyjmować wartości parzyste $m = 2t$, spełniające nierówności:

$$0 < 2t \leqslant \frac{x}{2l+1};$$

wartości takich jest dokładnie $E\frac{x}{2(2l+1)}$.

Zestawiając otrzymane wyniki, znajdujemy na sumę $\sum\limits_{k>0}^{k\leqslant\frac{n}{2}}\theta(2k)$ wartość:

$$\sum_{l>0}^{l\leqslant\frac{x}{2}} E\frac{x}{2l} + \sum_{l\geqslant 0}^{l\leqslant\frac{x-2}{4}} E\frac{x}{2(2l+1)},$$

którą na mocy tożsamości:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant\frac{x}{2}} E\frac{x}{2n} = \sum_{i>0}^{l\leqslant\frac{x-2}{4}} E\frac{x}{2(2l+1)} + \sum_{l>0}^{l\leqslant\frac{x}{4}} E\frac{x}{4l}$$

możemy jeszcze przepisać w postaci:

$$\sum_{k>0}^{k\leqslant\frac{x}{2}} \theta(2k) = 2\sum_{n>0}^{n\leqslant\frac{x}{2}} E\frac{x}{2n} - \sum_{n>0}^{n\leqslant\frac{x}{4}} E\frac{x}{4n},$$

lub

$$\sum_{k>0}^{k\leqslant\frac{x}{2}} \theta(2k) = 2T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{4}\right).$$

W ten sposób wzór (7) daje:

$$\varphi(x) = 2\,T(x) - 4\,T\left(\frac{x}{2}\right) + 4T\left(\frac{x}{4}\right), \tag{8}$$

co jeszcze zauważywszy, iż:

$$T(x) = E\frac{x}{1} + E\frac{x}{2} + E\frac{x}{3} + \ldots$$

$$T\left(\frac{x}{2}\right) = E\frac{x}{2} + E\frac{x}{4} + E\frac{x}{6} + \ldots\ldots$$

$$T\left(\frac{x}{4}\right) = E\frac{x}{4} + E\frac{x}{8} + E\frac{x}{12} + \ldots\ldots$$

i łącząc w wyrażeniu $2T(x) - 4T\left(\frac{x}{2}\right) + 4T\left(\frac{x}{4}\right)$ wyrazy podobne, możemy napisać w postaci:

$$\varphi(x) = 2\left[E\frac{x}{1} - E\frac{x}{2} + E\frac{x}{4} + E\frac{x}{5} - E\frac{x}{6} + \ldots\ldots\right],$$

lub, w formie zwięzłej:

$$(9) \qquad \varphi(x) = 2\sum_{n>0}^{n\leqslant x}(-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} E\frac{x}{n}.$$

Porównywając ze sobą wzory (5) i (9), otrzymujemy ciekawą tożsamość:

$$E\sqrt{x} - E\frac{x-1}{2}.E\frac{x+1}{2} + 2\sum_{n>0}^{n\leqslant\frac{x-1}{2}} E\sqrt{x+n^2} = \sum_{n>0}^{n\leqslant x}(-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} E\frac{x}{n}.$$

§ 10. Wzory (5) i (9) nie są dogodne do obliczania funkcyi $\varphi(x)$ przy nieco większych wartościach na x, gdyż sumy, wchodzące po prawych stronach tych wzorów, zawierają wtedy wielką liczbę składników: odpowiednio $E\frac{x-1}{2}$ oraz Ex. Np dla $x=1000$ suma we wzorze (5) zawiera 499, zaś suma we wzorze (9) aż 1000 składników. Ze wzoru (8) można jednak otrzymać dogodniejszy wzór na obliczanie funkcyi $\varphi(x)$, używając tożsamościowego przekształcenia $T(z)$, podanego przez Lejeune-Dirichleta.

Aby otrzymać to przekształcenie, podzielimy wszystkie całkoozwiązania (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant z$$

na dwie klasy, zaliczając do pierwszej rozwiązania, dla których $n \leqslant \sqrt{z}$, zaś do drugiej wszystkie pozostałe rozwiazania, a więc te, dla których $n > \sqrt{z}$. Policzmy, ile jest rozwiązań w każdej klasie.

Przyjmując na n jakąkolwiek wartość całkowitą, dodatnią, nie większą od $\sqrt{z}$, będziemy otrzymywali rozwiązania pierwszej klasy, jeżeli liczba całkowita, dodatnia m będzie $\leqslant \frac{z}{n}$; przy każdem takiem n będzie zatem dokładnie $E\frac{z}{n}$ rozwiązań, a więc ogólna liczba rozwiązań pierwszej klasy wynosi:

$$\sum_{n>0}^{n \leqslant \sqrt{z}} E\frac{z}{n}.$$

Policzmy teraz, ile jest rozwiązań klasy drugiej, czyli ile jest całkowiwitych dodatnich rozwiązań (m, n) nierówności:

$$mn \leqslant z, \quad n > \sqrt{z},$$

lub

$$\sqrt{z} < n \leqslant \frac{z}{m},$$

Przyjmijmy oznaczoną dodatnią, całkowitą wartość na m. Napisane ostatnio nierówności wskazują, że gdyby było $\frac{z}{m} < \sqrt{z}$, czyli $m > \sqrt{z}$, (m, n) nie mogłoby przy żadnem n być rozwiązaniem uważanej klasy, Musi więc być $m \leqslant \sqrt{z}$. Ale w takim razie przy danem m, n będzie mogło przyjmować dokładnie $E\frac{z}{m} - E\sqrt{z}$ różnych wartości, dając rozwiązania (m, n) uważanej klasy, tak, iż ogólna liczba rozwiązań tej klasy wyniesie:

$$\sum_{m>0}^{m \leqslant \sqrt{z}} (E\frac{z}{m} - E\sqrt{z}),$$

$$\sum_{m>0}^{m \leqslant \sqrt{z}} E\frac{z}{m} - (E\sqrt{z})^2,$$

W ten sposób znajdujemy, iż

$$T(z) = 2 \sum_{m>0}^{n \leqslant \sqrt{z}} E \frac{z}{n} - (E\sqrt{z})^2 , \tag{10}$$

co przedstawia wzór, któryśmy chcieli wyprowadzić.

Na mocy tożsamości (8) z łatwością już otrzymamy, biorąc pod uwagę ostatni wzór na $T(z)$ i łącząc wyrazy podobne:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -2(E\sqrt{x})^2 + 4\left(E\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 - 4\left(E\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2 \\ & + 4 \sum_{n>0}^{n \leqslant \sqrt{x}} (-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} E\frac{x}{n} - 8 \sum_{n > \frac{\sqrt{x}-2}{4}}^{n \leqslant \frac{\sqrt{2x}-2}{4}} E\frac{x}{4n+2} + 8 \sum_{n > \sqrt{\frac{x}{8}}}^{n \leqslant \frac{\sqrt{x}}{2}} E\frac{x}{4n} . \end{aligned} \tag{11}$$

Liczba składników we wszystkich trzech sumach razem jest zawsze mniejsza od $\frac{5}{4}\sqrt{x} + 2$; wzór (10) jest zatem przy wyższych wartościach na x dogodniejszy do obliczania, niż wzory (5) i (9). Np. dla $x = 1000$ sumy te zawierają odpowiednio 31, 3 i 4 składniki, tak iż w całym wzorze trzeba wtedy obliczyć tylko 41 wartości symbolu E, gdy tymczasem we wzorach (5) i (9) trzebaby przy $x = 1000$ wyznaczyć odpowiednio 502 i 1000 wartości tego symbolu.

Dla $x = 100$ należy we wzorze (10) wyznaczyć tylko 16 wartości E; znajdziemy:

$$\varphi(1000) = 484.$$

Dla $x = 1000$ obliczyliśmy:

$$\varphi(1000) = 7062 ,$$

a więc w pierwszym tysiącu przypada na każdą liczbę średnio po 7 rozkładów na różnicę dwóch kwadratów.

§ 11. Ze wzorów (8) można z łatwością otrzymać ciekawe wyrażenie na wartość przybliżoną funkcyi $\varphi(x)$, używając w tym celu wzoru na przybliżoną wartość funkcyi $T(z)$, znalezionego przez Dirichleta.

Wzór ten opiewa, iż dla wielkich wartości z można przyjąć:

$$T(z) = z(\log z + 2C - 1),$$

gdzie symbol log oznacza logarytm Nepera, zaś literą C oznaczamy liczbę

$$C = 0{,}5772156649 \ldots\ldots,$$

tak zwaną stałą Eulera; błąd napisanej wyżej równości przybliżonej jest stale mniejszym od pewnej wielokrotności liczby $\sqrt{z}$.

Podstawiając tę wartość przybliżoną na $T(z)$ do wzoru (8), otrzymamy z łatwością równość przybliżoną:

$$\varphi(x) = x(\log x + 2C - 1),$$

skąd jeszcze wnosimy o przybliżonej równości pomiędzy sumami $\varphi(x)$ $T(x)$, ściślej, o nierówności:

$$|\varphi(x) - T(x)| < A\sqrt{x},$$

gdzie A oznacza pewną liczbę stałą. Można stąd wywnioskować, że różnica średnich arytmetycznych:

$$\frac{\tau(1) + \tau(2) + \ldots\ldots + \tau(m)}{m} - \frac{\theta(1) + \theta(2) + \ldots\ldots + \theta(m)}{m},$$

czyli średnich wartości funkcyj $\tau(n)$ i $\theta(n)$ dla liczb od 1 do m, zmierza przy wzrastaniu m do zera. Wysławiamy to, mówiąc, że średnie wartości funkcyj $\tau(n)$ i $\theta(n)$ są sobie równe.

Np. przy $x = 100$ dla funkcyj:

$$\varphi(x), \quad T(x) \quad \text{i} \quad x(\log x + 2C - 2),$$

znajdujemy odpowiednio wartości:

$$484, \quad 482, \quad 476;$$

przy $x = 1000$ wartości:

$$7062, \quad 7069, \quad 7062{,}2;$$

średnie wartości funkcyj $\tau(n)$ i $\theta(n)$ wynoszą: dla pierwszej setki odpowiednio:

4,83 i 4,82, (różnią się więc o 0,02).

dla pierwszego tysiąca:

7,062 i 7,069, różnią się więc o —0,007).

§ 12. Wzór (7a) rozdz. I-go pozwala z łatwością wykazać, iż dla liczb względnie pierwszych m i n mamy stale:

$$\tau(1)\,\tau(mn) = \tau(m)\,\tau(n).$$

Opierając się na tej tożsamości, można otrzymać przekształcenie szeregu nieskończonego:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} \qquad (s > 1).$$

na iloczyn nieskończony, z którego wynika tożsamość:

$$F(s) = 2\left(1 - \frac{2}{2^s} + \frac{2}{2^{2s}}\right)\zeta^2(s),$$

gdzie przez $\zeta(s)$ oznaczamy fnnkcyę Riemanna:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Z tożsamości tej, biorąc pod uwagę znany wzór:

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^s} = \Phi(s),$$

otrzymać można z łatwością:

$$\lim_{\varrho=0} [F(1+\varrho) - \Phi(1+\varrho)] = \log^2 2,$$

skąd można wnioskować, że jeżeli wyrażenie:

$$\sum_{n>0}^{n\leqslant x}\frac{\tau(n)}{n}-\sum_{n>0}^{n\leqslant x}\frac{\theta(n)}{n},$$

dąży dla $x=\infty$ do nieoznaczonej granicy, to granicą tą może być tylko liczba $\log^2 2$, a że, jak to można z łatwością wykazać, opierając się na nierówności dla $\varphi(x)-T(x)$ z § 11, napisane wyżej wyrażenie rzeczywiście zmienia do granicy, więc mamy:

$$\lim_{x=\infty}\left(\sum_{n>0}^{n\leqslant x}\frac{\tau(n)}{n}-\sum_{n>0}^{n\leqslant x}\frac{\theta(n)}{n}\right)=\log^2 2.$$

§ 13. Z innych wzorów analitycznych, dotyczących funkcyi $\tau(n)$ podamy jeszcze dwa, na sumę:

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\tau(n). \qquad (|x|<1)$$

Dla otrzymania pierwszego z tych wzorów przedstawimy uważaną sumę w postaci podwójnej:

$$S=\sum_{\sigma}x^{\mu^2-\nu^2},$$

gdzie obszar sumowania (σ) rozciąga się na wszystkie wartości całkowite μ, ν, spełniające nierówność:

$$\mu^2-\nu^2>0.$$

Z nierówności tej znajdujemy:

$$|\mu|>|\nu|,$$

tak iż możemy założyć:

$$|\mu|=|\nu|+k,$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą dodatnią. Ostatnia równość daje:

$$\mu^2-\nu^2=2|\nu|.k+k^2,$$

tak, iż:

$$S=\sum_{k,\nu}x^{2|\nu|.k+k^2},$$

gdzie sumowanie względem k rozciągnąć należy na wszystkie liczby całkowite dodatnie, zaś względem ν — na wszystkie liczby całkowite. Wykonywając sumowanie względem ν, otrzymamy:

$$S = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^{2k}}{1-x^{2k}} x^{k^2}.$$

Dla otrzymania drugiego wzoru na tę samą sumę, należałoby się oprzeć na zależności pomiędzy funkcyami $\tau(n)$ i $\theta(n)$. Przeprowadzając rozumowania analogiczne z wyłożonemi szczegółowo w § 9 przy wyprowadzaniu wzoru (9), i opierając się na wzorze Lamberta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \theta(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n},$$

dostalibyśmy wzór:

$$S = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

Przez porównanie obu wzorów na sumę S, otrzymamy ciekawą tożsamość:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x^{2n}}{1-x^{2n}} x^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2(n^2-1)}{4}} \frac{x^n}{1-x^n}, \qquad (|x|<1).$$