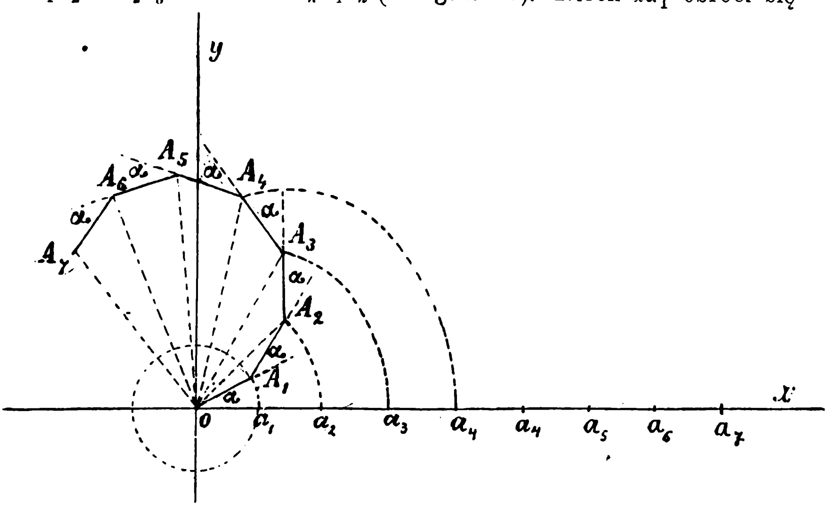
MISCELLANEA MATEMATYCZNE.

1. Nieco odmienny sposób dowodzenia twierdzeń Poinsota o wielokątach foremnych i związane z nim niektóre szczegóły.

Weźmy na osi x kartezyańskiego układu spółrzędnych, poczynając od początku tegoż O, szereg równych odcinków $\delta = Oa_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \ldots\ldots = a_{n-1}a_n$ (na fig. $n=7$). Niech aa_1 obróci się



dokoła O o kąt α, tak samo a_1a_2 dokoła a_1 o tenże kąt i t. d., wtedy zamiast odcinka Oa_n otrzymamy łamaną foremną $OA_1A_2\ldots\ldots A_n$ (na fig. $n=7$). Rzucamy tą łamaną na osi, a oznaczywszy spółrzędne punktu A_n (wzg. A_7) przez x, y, otrzymamy:

$$(1)\quad \begin{cases} x=\delta(\cos a+\cos 2a+\ldots\ldots\cos na)=\delta\dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}a\sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}, \\[2ex] y=\delta(\sin a+\sin 2a+\ldots\ldots+\sin na)=\delta\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}a\sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}, \end{cases}$$

Stąd:

$$(2)\quad x^2+y^2=OA^2_n=\varrho^2=\delta^2\frac{\sin^2\dfrac{na}{2}}{\sin^2\dfrac{a}{2}},\ \text{czyli}\ \varrho=\pm\delta\frac{\sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}.$$

Jeżeli $\varrho=0$, to punkt A_n pada na O i wtedy wogóle dostajemy łamaną foremną zamkniętą (wielokąt foremny). Tutaj:

$$(3)\qquad \frac{\sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}=0.$$

więc, gdy zachodzi (3) wielokąt mamy foremny. Dla tego musi być $\sin\frac{na}{2}=0$, co wtedy tylko jest możliwe, gdy $\frac{na}{2}=k\pi$, gdzie k naturalnie całkowite i $=0$ lub >0. Mogą być następujące i tylko te przypadki: 1) $k=0$; 2) $k=1$; 3) $k<n$; 4) $k=n$; 5) $k>n$.

Jeżeli $k=0$, to i $a=0$, ale

$$\frac{\sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}\neq 0,\quad \text{bo}\quad \lim\left(\frac{\sin\dfrac{na}{2}}{\sin\dfrac{a}{2}}\right)_{a=0}=\lim\left(\frac{n\varepsilon}{\varepsilon}\right)=n,$$

gdzie ε jest bardzo blizka do 0 wartość na a. Tutaj nie mamy wielokąta, jak to zresztą widać odrazu.

2) $k=1$. Wtedy $a=\frac{2\pi}{n}$. Mamy wielokąt foremny wypukły.

W tym przypadku gdy $n=1$, mamy tu jedyny wyjątek [1]. Przy $n=2$ należy rozpatrywać 2 zwroty tego samego odcinka.

3) $k<n$. Tu może się dziać różnie: a) k jest liczbą pierwszą względem n; b) k—zawiera wspólny z n dzielnik, albo samo dzieli n.

a) Z tego, że $n\alpha=2k\pi$, wypada, zwróciwszy uwagę na linię kołową $O(\delta)$, (co zresztą wcale nie jest konieczne), w której wyobrażamy sobie szereg promieni równoległych do boków A_1A_2, A_2A_3 i t. d., że ostatni równoległy do $A_{n-1}A_n$ promień będzie nachylony pod kątem $\alpha=\frac{k}{n}2\pi$ i że przy takiej operacyi należy wykonać k pełnych obrotów dokoła O. Liczba $n-k$ jest taksamo pierwsza względem n, a ponieważ $\frac{k.2\pi}{n}+\frac{(n-k)2\pi}{n}=2\pi$, to figura utworzona z powyższych n promieni pozostanie sama w sobie, zmieni się tylko kierunek obiegu. Stąd, włączając 1 do liczb bezwzględnie pierwszych i zauważywszy, że eulerowski symbol $\varphi(n)$ oznaczający, liczbę liczb pierwszych i mniejszych względem n, jest zawsze liczbą parzystą, widzimy, że w rozpatrywanym przypadku dostanie się $\frac{1}{2}\varphi(n)-1$ wielokątów różnych. Będą to wielokąty foremne gwiaździste.

b) Gdy k zawiera czynnik wspólny z n lub dzieli n, łatwo z powyższego wywnioskować, iż w tym przypadku dostaniemy wielokąt o mniejszej niż n liczbie boków w 2, 3, 4.. i t. d. razy. Z równań bowiem $an=k.2\pi$, gdy k i n dzielą się przez W i dają ilorazy k' i n', czyli $an'=k'.2\pi$, jeden z poprzednich wierzchołków, mianowicie n' padnie w O, a pozostałe boki będą odpowiednio przystawały do poprzednich n'. Dostaniemy wielokąty o podwójnych, potrójnych i t. d. bokach i wierzchołkach.

4) $k=n$. Stąd $\alpha=2\pi$. Tutaj znowu $\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=n$.

---

[1] Łatwo to wyprowadzić tak jak, w pierwszym przypadku, rozpatrując granicę stosunku $\dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

5) $k>n$. Niech $k=s.n+r$, wtedy:

$$a=\frac{(sn+r)2.\pi}{n}=s.2\pi+\frac{r.2\pi}{n}.$$

Widzimy stąd; że ten przypadek zawiera w sobie w formie ogólnej to, co było poprzednio już uwzględnione i nic ponadto.

Z tego wnioskujemy, że wielokąty foremne mogą być przy danej liczbie n boków tylko trzech rodzajów: 1) jeden wypukły, 2) $\frac{1}{2}\varphi(n)-1$ gwiaździstych, 3) wielokrotne, które można zaliczyć do wielokątów foremnych o mniejszej liczbie boków.

Należy zwrócić jeszcze uwagę na ten przypadek, kiedy w równaniu $an=k.2\pi$. Przy $n=2k$ dostaniemy $a=\pi$. Stąd widoczne jest, że wielokątem tego rodzaju będzie n-krotny odcinek OA_1, jeżeli k razy uwzględnimy każdy z jego zwrotów [1].

Równanie $\varrho=\delta\dfrac{\sin\frac{na}{2}}{\sin\frac{a}{2}}$ jest, jak łatwo się przekonać, równaniem krzywej algebraicznej zamkniętej, gdyż oznaczając $\sin\frac{a}{2}=\xi$ w równaniach powyższych (1) dostaniemy na x i y pewne wzory postaci $M_1+M_2\sqrt{1-\xi^2}$ i $N_1+N_2\sqrt{1-\xi^2}$, przez co równania możemy przepisać w ten sposób:

$$(x-M_1)^2=M_2(1-\xi^2),$$
$$(y-N_1)^2=N_2(1-\xi^2).$$

Tu M_1, M_2, N_1, N_2 są funkcye algebraiczne wymierne wielkości ξ. Eliminując z tych równań ξ, dostaniemy równanie krzywej algebraicznej.

Dalej, gdy argument a przebiegnie obszar zmienności od O do 2π, punkty A_1, A_2, A_3..... przejdą w swe położenie początkowe.

---

[1] Łamaną zygzakowatą, która się dostanie, gdy argument α przyjmuje na przemian równe co do wartości bezwzględnej i stałe, lecz względnie różne (dodatnie i ujemne) wartości można też rozpatrywać jako wielokąt foremny, gdy $n=\infty$. Na powierzchni walcowej to samo może być i przy skończonej wartości na n.

Nie możemy się tu zajmować badaniem tych krzywych, nadmienimy tylko, że w szczególnym przypadku, gdy $n=2$, dostaniemy równanie $\varrho = 2\delta \cos \frac{a}{2}$, które po podstawieniu $\varphi = \frac{3}{2} a$, zamieni się na $\varrho = 2\delta \cos \frac{\varphi}{3}$. Jak wskazuje samo równanie ostatnie, możemy krzywéj używać do podzielenia kąta na 3 części równe, a także do geometrycznej interpretacyi pierwiastków równania 3-go stopnia w tym przypadku. Niech będzie dane tego rodzaju równanie stopnia 3-go:

$$y^3 + ay = b.$$

Pierwiastki jego są:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}, \quad y_3 = -2\sqrt{\frac{-a}{3}} \cos \frac{\pi - \varphi}{3},$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{a}{3}} \cos \frac{\pi + \varphi}{3}.$$

Stąd, dając na δ wartość $= \sqrt{\frac{-a}{3}}$, będziemy mogli napisać:

$$y_1 = 2\delta \cos \frac{\varphi}{3} = \varrho_1 \quad y_3 = -2\delta \cos \frac{\pi - \varphi}{3} = \varrho_2,$$

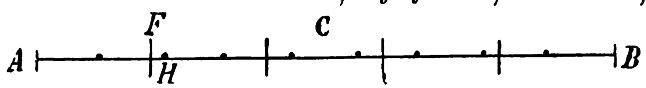
$$y_3 = -2\delta \cos \frac{\pi + \varphi}{3} = \varrho_3, \text{ gdzie } \cos \varphi = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{-27}{a^3}}.$$

Zdaniem naszem, powyższy sposób traktowania rzeczy może być uwzględniony w klasie wyższej przy nauczaniu Geometryi, w której, zwykle o ciekawej i interesującej nauce o wielokątach foremnych mówi się często nie to, co najwięcej ucznia interesuje. a także nie wskazuje się łączności pomiędzy Arytmetyką i Geometryą, nie podaje sposobu podzielenia kąta na 3 równe części i geometrycznej interpretacyi równania 3-go stopnia. Nadmieniliśmy to wszystko tutaj ogólnikowo, pozostawiając nauczycielowi, co zresztą jest bardzo nietrudne, przeprowadzić rzecz szczegółowo. Krzywa wspomniana jest wygodniejszą do ilustracyi podzielenia kąta na 3 części równe, niż zwykle używana i przez **Borela** nadmieniona konchoida **Nikomedesa**. *L. Z.*

2. Zadanie.

Odcinek $AB=a$ został podzielony na m równych części, odznaczonych na rysunku kreskami, i niezależnie od tego na n równych części, oznaczonych kropkami. Zakładając, że $m<n$ i że m i n są liczbami względem siebie pierwszemi, znaleść, która kreska i kropka wewnątrz odcinka są w najmniejszej od siebie odległości i w jakiej mianowicie.

Rozwiązanie. Przedewszystkiem z symetrycznego względem środka odcinka rozmieszczenia kresek i punktów wynika, że żądanych układów (z kreski i kropki) otrzymamy dwa, symetrycznie rozłożone względem środka C; wystarcza zatem znaleść jeden, aby w tejże chwili otrzymać drugi. Odszukajmy np. tę kreskę F, która będzie w najkrótszej odległości od kropki H, znajdującej się przed nią (t. j. kreską) na lewo. Jeżeli kreska ta odcina od A, dajmy na to, x odcinków, z któ-



rych każdy $=\frac{a}{m}$, to $AF=\frac{ax}{m}$; przypuśćmy, że kropka H odcina od A swoich odcinków y, każdy z nich ma długość $\frac{a}{n}$, $AH=\frac{ay}{n}$.

Odległość $HF=\frac{ax}{m}-\frac{ay}{n}$; ponieważ $y=E\left(\frac{ax}{m}:\frac{a}{n}\right)=E\left(\frac{nx}{m}\right)$[1],

więc $HF=\frac{ax}{m}-\frac{a}{n}E\left(\frac{nx}{m}\right)=\frac{a}{n}\left(\frac{nx}{m}-E\frac{nx}{m}\right)=\frac{ak}{mn}$, gdzie k jest resztą, otrzymaną z podzielenia nx przez m.

Ponieważ HF ma być najmniejszą odległością kreski od kropki, więc x powinno mieć taką wartość, aby reszta k była najmniejsza okażemy niebawem, że min. $k=1$ i że szukana najmniejsza odległość

$$HF=\frac{a}{mn}.$$

Dając na x wszystkie kolejne wartości, jakie przybierać może, od 1 do $m-1$, otrzymamy przy dzieleniu nx przez m wszystkich

---

[1]) E znak funkcyi „entier“ = całości.

reszt $m-1$, które, jak to łatwo dowieść, będą wszystkie różne; gdyby bowiem, przy $x=p$ i $x=q>p$, reszty były te same, np. z, wtedy oznaczając odpowiednie ilorazy przez u i v, mielibyśmy: $np=mu+z$ i $nq=mv+z$, skąd $n(q-p)=m(v-u)$ i $v-u=\frac{n(q-p)}{m}$, co oczywiście, nie może mieć miejsca, gdyż prawa strona całością być nie może $(p<q<m)$.

Z powyższego wynika, że między temi resztami muszą się znajdować wszystkie liczby całkowite od 1 do $m-1$ włącznie; najmniejsza z nich $=1$; tak więc min. $k=1$ i min. szukanej odległości $HF=\frac{a}{mn}$. Mamy więc na wyznaczenie odpowiednich wartości x i y równanie $\frac{ax}{m}-\frac{ay}{n}=\frac{a}{mn}$ albo

$$nx-my=1\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

W celu otrzymania pierwiastków równania (a), czyniących zadość warunkom, aby były całkowite, dodatnie i oprócz tego $x<m$ $y<n$, możemy z korzyścią zastosować własności przybliżeń (reduktów) ułamków ciągłych. Zamieńmy ułamek $\frac{n}{m}$ na ciągły i weźmy przedostatnio jego przybliżenie, które oznaczmy przez $\frac{N}{M}$ (oczywiście, $N<n$, $M<m$).

a) Jeżeli $\frac{N}{M}$ zajmuje nieparzyste miejsce w szeregu przybliżeń, wówczas, jak wiadomo, $\frac{n}{m}-\frac{N}{M}=\frac{1}{mM}$ czyli $nM-mN=1$, to znaczy, że w tym przypadku M i N będą żądanemi pierwiastkami równania (a).

b) Jeżeli zaś $\frac{N}{M}$ zajmuje miejsce parzyste, wtedy $\frac{n}{m}-\frac{N}{M}=-\frac{1}{mM}$ czyli $nM-mN=-1$, skąd $-nM+mN=+1$; dodajmy i odejmijmy od lewej strony mn, otrzymamy; $mn-nM-mn+mN=1$, wreszcie $n(m-M)-m(n-N)=1$. to znaczy, że w tym przypadku pierwiastkami będą: $x=m-M$, $y=n-N$.

Należałoby jeszcze udowodnić, że otrzymane pierwiastki będą jedynemi, czyniącemi zadość warunkom zadania; dowodzenie to, jako zbyt proste, opuszczamy.

Przykład: $m = 8$

$n = 11$

$$\frac{11}{8} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$ przybliżenia: $\frac{1}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{11}{8}$: $x = 3\,(=M)$;

$y = 4\,(=N)$.

Najkrótsza więc odległość będzie między końcem 3-go większego i znajdującym się przy nim końcem 4-go mniejszego odcinka (albo, w skutek symetryi względem środka, między końcem 5-go większego odcinka i znajdującym się za nim końcem 7-go mniejszego). Odległość ta wynosi $\frac{a}{11.8} = \frac{a}{88}$,

Przykład 2-gi: $m = 25$, $n = 34$.

$$\frac{34}{25} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}}$$ Przybliżenia: $\frac{1}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{15}{11}$; $\frac{34}{25}$.

$x = 14\,(= m - M)$

$y = 19\,(= n - N)$

A więc najkrótsza odległość będzie między końcem 14-go większego odcinka i leżącym **przed** nim końcem 19-go mniejszego (lub między końcem 11-go większego i końcem 15-go mniejszego, leżącego za poprzednim). Odległość ta $= \frac{a}{25.34} = \frac{a}{850}$.

Z. Arl.