Tad. BANACHIEWICZ.

PARĘ UWAG O SZEREGACH HARMONICZNYCH.

Uwagi powyższe podajemy z powodu zadania, umieszczonego w № 1 „Sprawozdań Koła matematyczno-fizycznego w Warszawie" za r. 1906. „Udowodnić elementarnie (bez pomocy twierdzenia, że pomiędzy N a $2N$ znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza), iż suma $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$ dla $n>1$ jest liczbą ułamkową."

Twierdzenie, iż $\sum\limits_{i=1}^{i=n}\frac{1}{i}$ $(n>1)$ jest ułamkiem, podał i udowodnił p. Zimin z Warszawy w № 384 „Gońca" Spaczyńskiego (str. 283—286; po ros.); punktem wyjścia jego rozwiązań jest tak zwany postulat Bertranda, którego dowód zawdzięczamy Czebyszewowi[1]: pomiędzy N a $2N-2$ $(N>3)$ znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza. Otóż z postulatu Bertranda twierdzenie p. Zimina daje się wyprowadzić w kilku wierszach; proste to twierdzenie nie wymaga jednak tak obszernych wiadomości pomocniczych.

Wprawdzie prawdziwość postulatu Bertranda wydaje się pewna i bez dowodu, ale mimo to nie przystoi brać go za podstawę rozważań elementarnych, pamiętając o słowach Gaussa: „najpiękniejsze twierdzenia Arytmetyki wyższej..... posiadają tę własność, że łatwo odkryć je za pomocą indukcyi, ale dowody ich są tak głęboko utajone, że natrafić na nie można tylko przez najgruntowniejsze bada-

[1]) Petropol. Ac. Bull. 11, rok 1853; również Tchebychef, Oeuvres. Tome I (1899), Mémoire sur les nombres premiers.

nia. Dla tego to właśnie Arytmetyka wyższa roztacza ten przedziwny urok, który uczynił ją najulubieńszą nauką wielkich matematyków...[1]

Poniżej dajemy zupełnie elementarne dowodzenie twierdzenia p. Zimina, naprowadzające na dość ciekawe uogólnienie.

Oznaczamy przez S_1 wyrażenie:

$$(a_1) \qquad S_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}, \qquad (n > 1)$$

i pomnóżmy obie strony równości (a_1) przez iloczyn $1.\,2.\,3.\ldots\ldots n$, n wyrazów ciągu naturalnego:

$$(b_1) \qquad 1,\ 2,\ 3.\ \ldots\ldots, n;$$

po przeniesieniu wszystkich wyrazów na stronę lewą, będzie:

$$(1) \qquad S_1 \,.\, 1.2.3\ldots.\, n - 2.3.4.\ldots,\, n - 3.\,4\ldots.\, n.1 - 12.3\ldots.\,(n-1) = 0.$$

Przypuśćmy, że S_1 jest liczbą całkowitą.

Wśród liczb ciągu (b_1) znajduje się, dla każdego n, jedna liczba—oznaczmy ją przez m—podzielna w liczbach całkowitych przez taką potęgę 2^i liczby 2, której wielokrotnością nie jest żadna inna liczba ciągu. Tak np. dla ciągu 1, 2, 3, 4, 5, 6, jest $m = 4 = 2^2$, gdyż w tym ciągu żadna liczba, prócz 4, nie jest podzielna bez reszty przez 2^2.

Podobnie dla liczb od 1 do 100 jest $m = 64 = 2^6$, gdyż prócz 64 żadna liczba, należąca do pierwszej setki, nie jest podzielna przez 2^6.

Innemi słowy, w ciągu (b_1) znajduje się tylko jedna liczba, podzielna przez najwyższą potęgę liczby 2. Dla dowodzenia załóżmy, że takich liczb jest w nim więcej niż jedna, a więc co najmniej dwie: m_1 i $m_2 > m_1$. Byłoby wtedy:

$$m_1 = \alpha\,.\,2^s, \quad m_2 = \beta\,.\,2^s \quad (\alpha \text{ i } \beta \text{ liczby nieparzyste, } \beta > \alpha),$$

i w ciągu uważanym znajdowałaby się też liczba m_3, określona przez równanie $m_3 = (\alpha + 1)2^s$ (gdyż $\beta.2^s > (\alpha+1)2^s > \alpha\,.\,2^s$, a w ciągu (b_1) żadna liczba całkowita pomiędzy m_1 i m_2 nie jest pominięta).

Lecz $m_3 = (\alpha+1)2^s =$ (liczbie parzystej)$\,.\,2^s$, byłoby podzielne przez 2^{s+1}, a więc przez wyższą potęgę liczby 2 niż m_1 i m_2, co przeczy założeniu.

---

[2]) Göttingische gelehrte Anzeigen, 1808, Mai 12: również Werke, II Bd. str. 152 (mylnie oznaczone 115).

Istotnie więc ciąg (b_1) zawiera jednę tylko liczbę, podzielną przez najwyższą potęgę liczby 2.

Ustaliwszy to, widzimy, że wśród wyrazów lewej strony równości (1) będzie jeden — oznaczmy go na chwilę przez w_m — podzielny przez niższą potęgę liczby 2, niż pozostałe; będzie nim ten wyraz, któremu brak czynnika m, podzielnego przez najwyższą potęgę liczby 2. Dzieląc obydwie strony wyrażenia (1) przez pewną potęgę liczby 2, dzielącą bez reszty wszystkie wyrazy, prócz w_m, otrzymalibyśmy:

$$(\text{liczba całkowita}) - (\text{ułamek}) = 0,$$

co świadczy o niemożliwości poczynionego co do S_1 założenia.

Uważajmy ogólniej wyrażenie:

$$(A) \qquad S = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots + \frac{a_n}{b_n},$$ w którem a_i, b_i $(i=1,2,3,\ldots,n)$ stanowią parę liczb całkowitych, względnie pierwszych, a mianowniki b_i tworzą ciąg:

$$(B) \qquad b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_n,$$

o tej własności, że wśród wyrazów ciągu znajduje się jeden, np. b_m, podzielny przez p^s, s-tą potęgę liczby pierwszej p, nie dzielącą bez reszty żadnego innego wyrazu b_i $(i = 1, 2, 3, — m-1, m+1, \ldots\ldots, n)$.

Suma S będzie ułamkiem: dowód byłby powtórzeniem dopiero co przeprowadzonych rozumowań dla szczególnego przypadku $a_i = 1$, $b_i = i$, $p = 2$ [1].

Dobierając na a_i i b_i różne liczby o własnościach dopiero co określonych, możemy wypisać różnorodne wyrażenia o wartości ułamkowej.

Przykłady:

1) Ciąg;

$u+1$, $u+1$, $u+3$, ... , $u+n$ (u liczba całkowita $\geqslant 0$)

---

[1] Zakładając prawdziwość postulatu Bertranda, wyciągamy z niego, że przez największą liczbę pierwszą w ciągu (b_1), może być podzielna bez reszty w tymże ciągu tylko jedna liczba; twierdzenie p. Zimina dowiedzione jest odrazu.

jest ciągiem (B) z liczby pierwszą $p=2$. Dowód identycznie ten sam, co w rozważanym wyżej przypadku ciągu (b_1), dla którego $u=0$.

Kładąc $a_i = \pm 1$, otrzymamy ułamek:

$$(a_2)\quad S_2 = \pm\frac{1}{u+1} + \frac{1}{u+2} \pm \frac{1}{u+3} \pm \ldots \pm \frac{1}{u+n} = \sum_{i=1}^{i=u} \pm \frac{1}{u+i}, \quad (u \geqslant 0,\ n > 1)$$

w wyrażeniu tem można znaki brać, jak się podoba.

2) Uważajmy ogólnie ciąg liczh dodatnich, stanowiących postęp arytmetyczny o różnicy nieparzystej, a więc ciąg:

$$(b_3)\qquad u+(2\nu+2),\ u+(2\nu+1)2, \ldots, u+(2\nu+1)i \ldots, u+(2\nu+1)n$$

gdzie u, ν, i n są liczby całkowite dodatnie.

Powiadam, że i ciąg (b_3) jest ciągîem (B), dla którego $p=2$ Przypuśćmy bowiem, że jest w nim więcej niż jedna, a więc conajmniej dwie liczby m_1 i $m_2 > m_1$, podzielne przez 2^s, najwyższą potęgę liczby 2.

Jeżeli m_1 i m_2 należą do ciągu (b_3), to:

$$(2)\qquad \left.\begin{aligned} m_1 &= u+(2\nu+1)i_1 \\ m_2 &= u+(2\nu+1)i_1 \end{aligned}\right\}\ i_1 \text{ i } i_2 \text{ liczby całkowite dodatnie, } i_2 > i_1;$$

zgodnie zaś z założeniem:

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} m_1 &= \alpha\,.\,2^s \\ m_2 &= \beta\,.\,2^s \end{aligned}\right\}\ \alpha \text{ i } \beta \text{ liczby nieparzyste, } \beta > \alpha.$$

Z (3) wyciągamy $m_2 - m_1 = (\beta - \alpha)\,.\,2^s \equiv 0 \pmod{2^{s+1}}$, gdyż $\beta - \alpha \equiv 0 \pmod 2$; że zaś z (2) mamy $m_2 - m_1 = (2\nu+1)(i_2 - i_1)$, przeto $(2\nu+1)(i_2 - i_1) \equiv 0 \pmod{2^{s+1}}$, skąd $i_2 - i_1 \equiv 0 \pmod{2^{s+1}}$.

Weźmy teraz liczbę i_3, określoną przez równanie:

$$(4)\qquad i_3 = i_1 + 2^s.$$

Mamy oczywiście $i_2 > i_3 > i_1$, wskutek czego liczba

$$(5)\qquad m_3 = u + (2\nu+1)i_3,$$

znajduje się w ciągu (b_3).

Wstawiając do (5) wartość i_3 z (4), otrzymamy:

$$m_3 = u + (2\nu+1)(i_1+2^s) = u + (2\nu+1)i_1 + (2\nu+1) \, . \, 2^s,$$

i uwzględniając (2) i (3):

$$(6) \qquad m_3 = m_1 + 2^s = a \, . \, 2^s + 2^s = (a+1)2^s;$$

że zaś $a+1 \equiv 0 \pmod 2$, przeto z (6) wypływałoby $m_3 \equiv 0 \; (\mathrm{mom}\; 2^{s+2})$ co świadczy o niemożliwości poczynionego założenia, że liczb, podzielnych przez najwyższą potęgę liczby 2, jest w ciągu (b_1) więcej niż 1.

Ciąg (b_3) jest więc istotnie ciągiem (B).

Ustaliwszy to, weźmy ciąg:

$$[u+(2\nu+1)]^k, \; [u+(2\nu+1) \, . \, 2]^k, \ldots . [u+(2\nu+1)n]^k,$$

którego wyrazy są k-temi potęgami (k liczba całkowita >0) wyrazów ciągu (b'_2). Rzecz widoczna, że i ciąg (b'_2) jest ciągiem (B), w którym $p=2$.

Wartość wyrażenia:

$$(a_3) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{a_i}{[u+(2\nu+1)i]^k}$$

będzie więc ułamkiem; (u, r jakiekolwiek liczby całkowite $\geqslant 0$, k liczba całkowita >0, a_i liczba pierwsza względem $u+(2\nu+1)i$). Kiedy $a_i = \pm 1$, $r=0$, $k=1$, (a_3), przechodzi na (a_2), kiedy zaś $a_i=1$, $r=0$, $k=1$, $u=0$, na (a_1).

Otrzymujemy więc twierdzenie: suma algebraiczna ułamków nieprzywiedlnych, których mianowniki są całkowitemi dodatniemi potęgami liczb całkowitych dodatnich, tworzących postęp arytmetyczny o różnicy nieparzystej, jest ułamkiem.

Przykładem wyrażenie:

$$\pm \frac{1}{2^k} \pm \frac{2^h}{3^k} \pm \frac{3^h}{4^k} \pm \ldots . \pm \frac{(n-1)^h}{n^k},$$

w którem znaki można brać jak się podoba, h i k liczby całkowite dodatnie.