B. DANIELEWICZ.

O wykładzie ilości niewymiernych w szkole średniej.[1]

Referent na wstępie zwraca uwagę na niezupełnie jeszcze ustaloną i może nie zawsze odpowiednią naszą terminologię matematyczną. Takie np. *a* małe, od którego zaczynamy i na którem kończymy Algebrę, bywa przez jednych nazywane wielkością, przez innych ilością, jeszcze przez innych liczbą algebraiczną i t. d. Liczba bywa nazywana wymierną i niewymierną, chociaż tak nazywać chyba można tylko to, co się daje mierzyć, a liczby mierzyć nie można, bo liczba jest już rezultatem pomiaru, jest jego wyrazem czy wyrażeniem, jest po prostu symbolem miary. Dlatego referent uważa, że gdyby Koło matematyczno-fizyczne zechciało się tą sprawą zająć, gdyby ją zbadało gruntownie i wypowiedziało jasno, jak w każdym przypadku postąpić należy, oddałoby dużą usługę zarówno autorom jak i ich czytelnikom, tak dobrze nauczającym jak i nauczanym.

Referent mówić będzie nie o liczbach, lecz o ilościach niewymiernych, rozumiejąc przez ilość każdą wielkość, względnie każdy stosunek dwóch wielkości tego samego gatunku, wszystko jedno, wymierzone czy niewymierzone, zarówno wyrażone jak i niewyrażone przez liczbę.

Otóż w szkole średniej ilości niewymierne są albo bardzo tylko powierzchownie traktowane, albo też do wykładu używa się t. z. przekroju liczb lub dwóch szeregów ilości wymiernych, względnie liczb, posiadających trzy wiadome własności.

[1]) Referat, przedstawiony na posiedzeniu naukowem Koła matematyczno fizycznego dnia 29 grudnia 1908 r.

Sposoby te są niewątpliwie bardzo dobre, lecz młodzież poczynająca studyować Algebrę, zdaje się ich nie rozumieć jak należy, bo nie widzi wyraźnie celu, w jakim te szeregi są tworzone, skutkiem czego referent zapytuje, czy nie byłoby lepiej pójść drogą odwrotną, t. j. najprzód dać pojęcie o ilościach niewymiernych całkiem niezależnie od owych szeregów; wykazać, że takie ilości nie dają się ściśle przez liczby wyrazić, lecz za to można dla każdej zawsze sformować takie dwa szeregi ilości wymiernych, względnie liczb, które posiadają wiadome trzy własności, i skutkiem tego wartość ilości niewymiernej można uważać za granicę, do której wyrazy rzeczonych szeregów dążą. Że granicy tej wprawdzie nigdy dosięgnąć nie można, lecz każdy wyraz obu szeregów przedstawia nam mniej lub więcej przybliżoną jej wartość.

Pierwszą część można przeprowadzić podobnie, jak się to czyni (a przynajmniej, jak się dawniej postępowało) w Geometryi, gdy chodziło o wprowadzenie pojęcia wielkości niespółmiernych. Sposób ten jest powszechnie znany, dlatego podajemy go tylko w zarysie.

Niech będą dwie ilości jakiekolwiek R i s, z których pierwszą chcemy wyrazić przez drugą. Dla prostoty niech te ilości przedstawiają dwie proste ograniczone.

Ażeby R wyrazić przez s, przenieśmy s na R, otrzymaną resztę r na s, stąd znów wypadłą resztę r' na r i t. d. Gdy tak postępować będziemy dalej, mogą się zdarzyć dwa i tylko dwa przypadki: albo trafimy na takie $r^{(\lambda)}$, które w poprzedniej reszcie mieści się całkowicie, czyli następna reszta będzie już zerem; albo też na taką resztę nie trafimy nigdy, choćbyśmy działanie nasze prowadzili bez końca, czyli, jak się zwykle mówi, do nieskończoności.

W pierwszym przypadku R i s daje się wyrazić całkowicie przez ostatnią resztę, t. j. dla dwu tych ilości reszta ostatnia stanowi miarę spólną, skutkiem czego takie dwie ilości można nazwać s p ó ł m i e r n e m i. Stosunek ich daje się wtedy wyrazić przez liczbę, a gdy s przyjmiemy za jedność, R daje się wyrazić przez liczbę jednostek s, czyli R można w y m i e r z y ć przez jednostkę s, i dlatego takie R zowie się i l o ś c i ą w y m i e r n ą (w stosunku do jednostki s).

Jeżeli zajdzie przypadek drugi, o s t a t n i a reszta n i e i s t n i e j e, więc naturalnie, wtedy R i s nie posiadają spólnej miary, czyli są niespółmierne; stosunku R do s przez liczbę wyrazić nie można, R przez jednostkę s wymierzyć się nie daje. Dlatego takie R nazywa się ilością niewymierną (w stosunku do jednostki s).

Na podstawie powiedzianego można postawić następujące dwie definicye:

1-o Ilością wymierną nazywamy taką wielkość, która, będąc spółmierną z jednostką, daje się przez liczbę tych jednostek wyrazić. Zaś

2-o. Ilością niewymierną nazywamy taką wielkość, która, będąc niespółmierną z jednostką, nie daje się przez liczbę tych jednostek wyrazić.

Wszakże, acz ilość niewymierna R, w stosunku do jednostki s, przez liczbę tych jednostek wyrazić się nie daje, to jednak można zawsze dla niej sformować takie dwa szeregi ilości wymiernych, względnie liczb, które posiadają następujące trzy własności:

1-o. Ilość R stale zawiera się pomiędzy każdą parą odpowiednich sobie w obu szeregach wyrazów, z których wszystkie wyrazy jednego szeregu są stale większe lub stale mniejsze od odpowiednich sobie wyrazów szeregu drugiego.

2-o. Wyrazy jednego szeregu stale rosną, drugiego stale maleją lub naodwrót.

3-o. Różnice pomiędzy odpowiedniemi sobie wyrazami obu szeregów stale maleją i mogą stać się mniejszemi od jakkolwiek małej ilości, jeżeli tylko weźmiemy parę wyrazów, dostatecznie od początku odległą.

Ażeby tego dowieść, załóżmy, że R i s są niespółmierne i przenieśmy s na R; niech się mieści np. a razy $+$ reszta r. Podzielmy s na ilekolwiek, np. na k równych części, byle mniejszych od r i od $s-r$; oznaczmy wielkość tych części przez $s_1 = \frac{s}{k}$ i s_1 przenieśmy na R. Niech się mieści b razy $+$ reszta r_1. Podzielmy s na większą, niż wprzód, liczbę części, np. na l części równych, mniejszych od r_1

i od $s_1 - r_1$; oznaczmy wielkość tych cząstek przez $s_2 = \frac{s}{l}$ i znów przenieśmy s_2 na R i postępujmy dalej tak samo. Ponieważ R i s są z założenia niespółmierne, przeto nigdy nie trafimy na $r_\lambda = 0$, temsamem i na takie s_λ, któreby mieściło się całkowicie w R. Ale otrzymamy związki:

$$(1)\quad \begin{cases} R = as + r,\ r < s\,, \\ R = bs_1 + r_1,\ r_1 < s_1 \text{ oraz } s_1 = \frac{s}{k} < r \text{ i od } s - r, \\ R = cs_2 + r_2,\ r_2 < s_2 \quad \text{"} \quad s_2 = \frac{s}{l} < r_1 \text{ i od } s_1 - r_1, \\ R = ds_3 + r_3,\ r_3 < s_3 \quad \text{"} \quad s_3 = \frac{s}{m} < r_2 \text{ i od } s_2 - r_2, \end{cases}$$

i t. d. bez końca.

Oprócz tego, ze sposobu naszego postępowania wynika:

$$(2)\quad \begin{cases} r > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots\ldots \\ s > s_1 > s_2 > s_3 > \ldots\ldots \\ s - r > s_1 - r_1 > s_2 - r_2 > s_3 - r_3 > \ldots\ldots \end{cases}$$

albowiem, skoro $s - r > s_1$, jest tembardziej większe od $s_1 - r_1$ i t, d.

Otóż z (1) możemy sformować następujące dwa szeregi:

$$3)\quad \begin{cases} as\,, \quad bs_1\,, \quad cs_2\,, \quad ds_3 \ldots\ldots \\ (a+1)s,\ (b+1)s_1,\ (c+1)s_2,\ (d+1)s_3, \ldots\ldots, \end{cases}$$

które właśnie posiadają wszystkie trzy wyżej zapowiedziane własności.

Przedewszystkiem wyrazy obu szeregów (3) są ilościami wymiernemi względem s, bo $s_1 = \frac{s}{k}$, $s_2 = \frac{s}{l}$ i t. d. — mogą więc być przez liczby jednostek s wyrażone. Następnie R widocznie zawiera się stale pomiędzy każdą parą odpowiednich sobie wyrazów obu szeregów, oraz każdy wyraz drugiego szeregu jest stale większy od odpowiedniego wyrazu szeregu pierwszego. Mamy więc spełniony warunek pierwszy.

Dalej, ponieważ wyrazy pierwszego szeregu powstają z (1) przez opuszczanie z tego samego R coraz mniejszych cząstek $r > r_1 > r_2 > r_3 \ldots$, zatem reszty pozostałe, czyli wyrazy szeregu pierwszego stale rosną. I naodwrót, ponieważ wyrazy szeregu drugiego otrzymujemy z (1) dodając do tego samego R coraz mniejsze ilości $s-r > s_1-r_1 > s_2-r_2 > \ldots$, więc wyrazy szeregu drugiego stale maleją, t. j. spełnia się warunek drugi.

Wreszcie, różnica pomiędzy odpowiedniemi sobie wyrazami obu szeregów (3) są równe: s, s_1, s_2, $s_3, \ldots$, te zaś ilości według (2) maleją, przeto różnice rzeczone również stale maleją i mogą się stać mniejszemi od jakkolwiek małej, z góry pomyślanej, ilości, jeżeli weźmiemy pary wyrazów dostatecznie od początku oddalone.

Skoro zaś pomienione różnice maleją nieograniczenie i wyrazy jednego szeregu stale rosną, drugiego stale maleją, znaczy to, że wyrazy obu szeregów (3) dążą do zrównania się, chociaż zrównać się nigdy nie mogą, a ponieważ R zawsze pomiędzy niemi się mieści, zatem wyrazy obu szeregów tembardziej zbliżają się do R, dążą do tego, aby się stały równemi ilości R, którą, skutkiem tego, uważać można za granicę, do jakiej wyrazy obu szeregów (3) podążają.

I oto przyszliśmy do tego samego określenia, z jakiego metoda odwrotna wychodzi, lecz nie postawiliśmy go z góry, tylko po wyjaśnieniu pochodzenia i znaczenia ilości niewymiernych, po wykazaniu, że ilości niewymiernej ściśle przez liczbę danych jednostek wyrazić nie można, dowiedliśmy ogólnie, iż dla każdej ilości niewymiernej można takie dwa szeregi ułożyć.

Dalej iść już można jak zwykle: można wyprowadzić wniosek o p r z y b l i ż o n y c h (z niedoborem lub nadmiarem) w a r t o ś c i a c h ilości niewymiernych, można je zilustrować na liczbach i t. d. Wreszcie należy uzasadnić działania na ilościach niewymiernych. Tylko odejmowanie bywa czasami niewłaściwie tłómaczone. Bywa ono czasami objaśniane w ten sposób: Gdy mamy dwa szeregi wyrazów:

$$(a) \qquad \begin{cases} a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots \ \text{rosnący,} \\ b_1, \ b_2, \ b_3, \ \ldots, \ b_n, \ \ldots \ \text{malejący,} \end{cases}$$

które definiują ilość niewymierną A, oraz dwa szeregi.

$$(\beta)\quad \begin{cases} c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots \text{ rosnący}, \\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots,\ d_n,\ \ldots \text{ malejący}, \end{cases}$$

definiujące ilość niewymierną C, to dla utworzenia szeregów definiujących różnicę $A—C$ należy sformować szeregi różnic:

$$(\gamma)\quad \begin{cases} a_1—c_1,\ a_2—c_2,\ a_3—c_3,\ \ldots,\ a_n—c_n,\ \ldots\ldots \\ b_1—d_1,\ b_2—d_2,\ b_3—d_3,\ \ldots,\ b_n—d_n,\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Otóż, ogólnie rzecz biorąc, tak nie jest; albowiem gdy oznaczymy $b_n—a_n = r'_n$ i $d_n—c_n = r_n''$, otrzymamy:

$$b_n—d_n = a_n—c_n + (r'_n — r''_n).$$

Jeżeli więc, jak to najczęściej bywa, $r'_n = r''_n$, to jest też $b_n—d_n = a_n—c_n$, czyli szeregi (γ) są identyczne, skutkiem czego nie czynią zadość wymaganym od nich trzem warunkom, a temsamem nie definiują różnicy $A—C$.

Żeby otrzymać szeregi właściwe, należy widocznie poodejmować odpowiednie sobie wyrazy szeregów wewnętrznych i zewnętrznych t. j. gdy np. $A > C$, sformować trzeba szeregi:

$$(\delta)\quad \begin{cases} b_1—c_1,\ b_2—c_2,\ b_3—c_3,\ \ldots,\ b_n—c_n,\ \ldots\ldots \text{ malejący}, \\ a_1—d_1,\ a_2—d_2,\ a_3—d_3,\ \ldots,\ a_n—d_n,\ \ldots\ldots, \text{ rosnący}, \end{cases}$$

które, jak to nie trudno ogólnie sprawdzić, odpowiadają wszystkim trzem warunkom wiadomym, czyli rzeczywiście definiują różnicę $A—C$.