

MIECZYŚLAW WOLFKE.

Elektron uważany jako środek ciśnień w eterze.¹⁾

I. Wstęp. Definicję elektronu i rozwinięcie jej analityczne musimy poprzedzić ogólnem rozważaniem nad „polem energetycznym“, które jest pojęciem zupełnie nowem i służy za podstawę tej pracy.

Wyobraźmy sobie dwa ciała, znajdujące się w przestrzeni w pewnej odległości i wywierające na siebie wpływ wzajemny: przyciągając się, odpychając lub też dążąc do pewnego położenia jedno względem drugiego. Odrzuciwszy hipotezę działania na odległość, z nowożytnymi poglądami niezgodną, musimy przyjąć za przyczynę zjawiska wpływ ośrodka, wypełniającego przestrzeń, a tem samem badać zjawiska podobne, jako rezultaty odpowiednich odkształceń w tym ośrodku.

Układ takich ciał, związanych ze sobą pewnymi siłami, posiada określoną energię wewnętrzną, która, na zasadzie powyższego założenia, będzie rezultatem przekształceń ośrodka. Ponieważ układ posiada funkcję sił, ilość energii wewnętrznej takiego układu ciał będzie energią potencjalną, t. j. zależną jedynie od względnych położzeń ciał rozważanych. Te to proste rozważania doprowadziły nas do pojęcia pola energetycznego.

Niechaj będzie ośrodek izotropowy, wypełniający w sposób jednolity przestrzeń bez granic i mogący ulegać przekształceniom.

¹⁾ Praca, drukowana po raz pierwszy w „Eclairage électrique“ 20 kwietnia 1907 r. Paryż.

Dane odkształcenie w pewnym punkcie ośrodka może być wyrażone odpowiednim wektorem, którego natężenie i kierunek będą odpowiadały natężeniu i kierunkowi odkształcenia ośrodka w tym punkcie przestrzeni. Otóż pewne rozmieszczenie odkształcenia ośrodka w przestrzeni, lub to, co nazywamy „polem odkształcenia“, będzie się wyrażało przez odnośne pole wektoryalne. Zakładając, że każde odkształcenie wymaga odpowiedniej pracy, wnioskujemy, że każdemu polu odkształcenia odpowiada określone rozmieszczenie energii w różnych punktach ośrodka. Takie to rozmieszczenie energii w polu odkształcenia nazywamy „polem energetycznym“.

Ilość energii, zawarta w jednostce przestrzeni jednorodnego pola energetycznego, nie może być zależna od położenia pola odkształcenia w danym obszarze przestrzeni, a to dzięki izotropowości ośrodka, a jest jedynie zależna od natężenia tego pola w rozważanym obszarze. Funkcję, która wyraża zależność między ilością energii w danym obszarze pola energetycznego a natężeniem jego pola odkształcenia, nazywamy „funkcją charakterystyczną“ danego pola.

Wyobraźmy sobie pewne pole energetyczne, odniesione do układu osi względnych, stałe w stosunku do tych osi, lecz mogące swobodnie przesuwać się w przestrzeni wraz ze swym układem osi względnych. Takie pole energetyczne nazywamy „polem elementarnym“. Jeżeli w przestrzeni znajduje się kilka pól elementarnych, to wytworzą one pole wypadkowe w ten sposób, że wektor pola odkształcenia wypadkowego będzie sumą wektorów pól elementarnych w danym punkcie, ilość zaś energii pola wypadkowego w danym punkcie przestrzeni wyrazi się przez funkcję charakterystyczną natężenia pola odkształcenia wypadkowego. Wiadomo zatem, że suma całkowitej energii pola energetycznego, w ten sposób wytworzonego, będzie zależna od wzajemnych położzeń pól elementarnych jednych względem drugich, a to z powodu, że ilość energii tego pola w danym punkcie przestrzeni będzie zależna od sumy geometrycznej pól elementarnych odkształcenia.

Jeżeli zatem wyobraźmy sobie pewne nieskończone małe przesunięcie ds jakiegoś punktu jednego z pól elementarnych, przyczem przyrost całkowitej energii pola wypadkowego niechaj

będzie dE , to na zasadzie prawa zachowania energii będziemy mogli powiedzieć, że wzdłuż danego przesunięcia została wykonana pewna praca $d\mathfrak{E}$, którą określi następujące równanie:

$$d\mathfrak{E} = - de.$$

Ponieważ pojęcie pracy jest ściśle związane z pojęciem siły, możemy przypuścić, że przez dany punkt pola elementarnego przechodzi siła, której składowa F_s wzdłuż przesunięcia wyrazi się przez następujące równanie:

$$(1) \quad \frac{d\mathfrak{E}}{ds} = - \frac{de}{ds};$$

składowa ta jest zatem ilościowo równa pochodnej całkowitej ilości energii pola wypadkowego, wziętej wzdłuż przesunięcia i ze znakiem przeciwnym.

Ponieważ pochodna $\frac{de}{ds}$ może być określona dla każdego punktu jednego z pól elementarnych i to we wszystkich punktach przestrzeni jako funkcja parametrów bezwzględnych, więc pola te mogą być rozważane pod względem statycznym, jako ciała stałe niezmiennie, związane układem sił, posiadających funkcje sił.

Widzimy zatem, że wszelkie pozorne działanie na odległość może być rozważane jako odpowiednie nałożenie na siebie pewnych pól elementarnych.

II. Definicja. Obecnie postaramy się dać definicyę atomu elektrycznego czyli elektronu, opartą na poprzedzających rozważaniach, a to raczej w celu konkretnej ilustracyi naszego pojęcia ogólnego pola energetycznego, aniżeli utworzenia podstawy dla jakiejś nowej teoryi zjawisk elektrycznych, która odpowiedzieć by mogła wszystkim wymaganiom obecnego stanu tej gałęzi wiedzy.

Zakładając istnienie ośrodka izotropowego, przypuszczamy, że odkształcenie, polegające na odchyleniu pewnych punktów tego ośrodka od ich normalnego stanu równowagi, wytwarza pracę,

określoną przez działanie siły przeciwnej odchyleniu. Przyjmujemy zasadę tę samą, którą się przyjmuje w teorii dźwięku i w teorii drgań świetlnych, t. j. że siła ta, dążąca do sprowadzenia punktów odchylenia ośrodka do ich normalnego stanu równowagi jest proporcjonalna do wielkości odchylenia i do objętości wszystkich elementów odchylonych.

Dajmy nato, że mamy w danym punkcie ośrodka: f —siłę, odpowiadającą danemu odchyleniu δ , i k —stałą, wyrażającą proporcjonalność między siłą a odchyleniem. Według przyjętej zasady, będzie:

$$(2) \quad f = k \cdot \delta; \quad \delta = \frac{1}{k} \cdot f.$$

W elemencie $d\tau$ pola sił ciągłego, o natężeniu H , ilość energii wyrazi się równaniem następującem:

$$(3) \quad de = h \cdot d\tau \int_0^{\delta} H d\delta = \frac{kh}{2} \delta^2 \cdot d\tau = \frac{h}{2k} \cdot H^2 \cdot d\tau,$$

gdzie h jest stałą, wyrażającą proporcjonalność między ilością energii a objętością pola. Widzimy, że równanie (3) daje nam ilość energii z jednej strony w zależności od odchylenia δ , a z drugiej strony w zależności od natężenia pola sił H . Całkowitą ilość energii danego pola otrzyma się drogą całkowania:

$$e = \frac{k \cdot h}{2} \iiint \delta \cdot d\tau = \frac{h}{2k} \iiint H^2 \cdot d\tau.$$

Przejdźmy do samej definicyi naszego elektronu.

Elektron jest to środek ciśnień w eterze o przepływie stałym, to znaczy, że przepływ sił ciśnień jest stały poprzez jakąkolwiek powierzchnię zamkniętą na około środka. Następnie zakładamy, że elektron dodatni jest środkiem ciśnień odśrodkowych, a elektron ujemny środkiem ciśnień dośrodkowych.

Obliczmy ilość całkowitą energii jednego elektronu. Niechaj przepływ całkowity będzie Φ ; natężenie pola sił dla punktu, znaj-

dującego się od środka w odległości R , jak również i odchylenie, wyrażą się przez następujące równania:

$$(4) \quad H = \frac{\Phi}{4\pi R^2}; \quad \delta = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Phi}{4\pi k^2},$$

w przyjęciu, że elektron jest idealnie symetryczny.

Ilość energii w elemencie przestrzeni pola wyrazi się na zasadzie (3) przez następujące równanie:

$$(4bis) \quad de = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2 R^4} \cdot d\tau.$$

Zakładając dla granicy niższej całkowania energii elektronu dodatni wielkość r_1 , a dla elektronu ujemnego r_2 , gdzie r_1 i r_2 są promieniami kul centralnych, otrzymamy ilości energii pól e_1 —elektronu dodatniego, a e_2 —elektronu ujemnego:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2} \int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{R^4} \cdot 4\pi R^2 \cdot dR = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{h}{k \cdot r_1} \cdot \Phi^2, \\ e_2 = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2} \int_{r_2}^{\infty} \frac{1}{R^4} \cdot 4\pi R^2 \cdot dR = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{h}{k \cdot r_2} \cdot \Phi^2, \end{array} \right.$$

gdyż dla elementu przestrzeni $d\tau$ mamy w tym przypadku proste wyrażenie następujące:

$$d\tau = 4\pi R^2 dR.$$

Dla obydwóch elektronów zakładamy jedną i tę samą wielkość Φ , gdyż, jak później zobaczymy, Φ przedstawia ładunek elektronu, który, jak wiadomo, jest ten sam dla obydwóch elektronów.

III. Odpychanie. Rozważmy dwa elektrony jednakowego znaku, np. obydwa dodatnie i znajdujące się w pewnej od siebie odległości. Niechaj to będą elektrony A i B (fig. 1). Jako zmienne, określające dany punkt przestrzeni M , przyjmijmy: odległość $AM=R$; kąt, jaki tworzy linia AM z linią AB , t. j. $\angle MAB = \omega$.

i kąt dwuścienny, utworzony przez płaszczyznę, zawierającą punkt M i linię AB z pewną płaszczyzną stałą, przechodzącą przez linię AB ; oznaczmy kąt ten przez η .

Widoczne jest, że pole wypadkowe będzie miało dwa elementy symetrii: oś AB i płaszczyznę PQ , prostopadłą do osi AB i przechodzącą przez jej środek. Niechaj odległość AB między

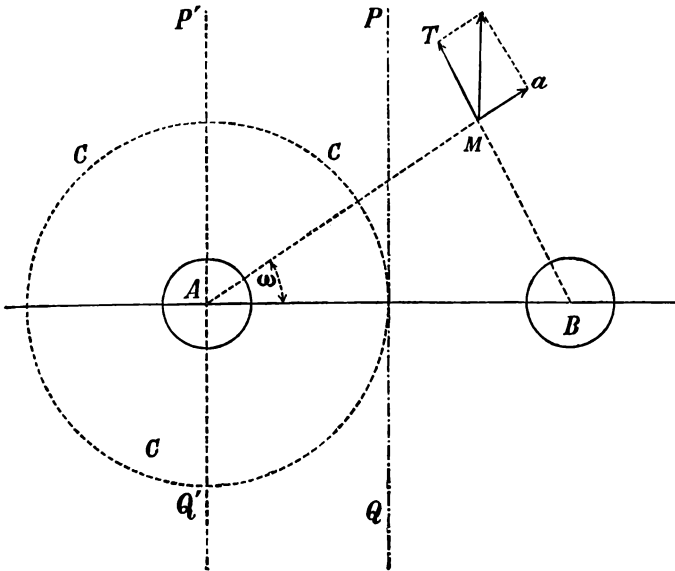


Fig. 1.

elektronami będzie s . Na zasadzie równania (4) będziemy mieli następujące wyrażenia na pola sił każdego elektronu H_A i H_B :

$$H_A = \frac{\Phi}{4\pi R^2}; \quad H_B = \frac{\Phi}{4\pi B M^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2},$$

gdzie BM jest bokiem trójkąta AMB . Jeżeli oznaczymy kąt AMB przez α , tedy pole wypadkowe sił H dwóch tych elektronów wyrazi się w zależności od pól H_A i H_B następującem równaniem:

$$(6) \quad H^2 = H_A^2 + H_B^2 + 2_A \cdot H_B \cdot \cos \alpha.$$

Z trójkąta AMB otrzymamy wartość na α :

$$2 \cos \alpha = 2 \cdot \frac{R - s \cos \omega}{\sqrt{R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2}},$$

skąd ostatecznie znajdujemy natężenie pola sił wypadkowego dwóch elektronów w funkcji powyższych zmiennych:

$$H^2 = \frac{\Phi^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{R^4} + \frac{1}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} + 2 \cdot \frac{R - s \cos \omega}{R^2 (R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Na zasadzie równania (4bis) znajdujemy obecnie ilość energii w elemencie $d\tau$ pola wypadkowego dwóch elektronów jednego znaku:

$$de = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} + 2 \cdot \frac{R - s \cos \omega}{R^2 (R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot d\tau.$$

W przyjętym układzie zmiennych element przestrzeni wyrazi się równaniem:

$$d\tau = R^2 \sin \omega \, dR \, d\omega \, d\eta,$$

tak, że ostatecznie ilości energii pola wypadkowego dwóch elektronów jednakowych wyrazi się wzorem następującym:

$$e = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{16\pi^2} \left[\iint \int \frac{\sin \omega}{R^2} \, dR \, d\omega \, d\eta + \iint \int \frac{R^2 \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} \, dR \, d\omega \, d\eta \right. \\ \left. + \iint \int \frac{(2R - 2s \cos \omega) \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} \, dR \, d\omega \, d\eta \right]. \quad (7)$$

Całkując odrazu wyrażenie (7) względem zmiennej η w granicach od 0 do 2π , otrzymujemy:

$$e = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{8\pi} \left[\iint \frac{\sin \omega}{R^2} \, dR \, d\omega + \iint \frac{R^2 \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} \, dR \, d\omega \right. \\ \left. + \iint \frac{(2R - 2s \cos \omega) \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} \, dR \, d\omega \right]. \quad (8)$$

Zanim zajmiemy się obliczeniem całek (8), zauważymy, że pole wypadkowe jest symetryczne względem płaszczyzny PQ , i dla tego możemy całkować tylko w obszarze lewym przestrzeni względem płaszczyzny FQ , a następnie pomnożyć otrzymany rezultat przez 2, co nam da w ten sposób całkę rozciągniętą na całą przestrzeń.

Pierwszą całkę wyrażenia (8) będziemy całkowali przede wszystkim wewnątrz kuli CCC (fig. 1), opisanej ze środka A promieniem $\frac{s}{2}$, czyli w granicach dla ω od 0 do π , a dla R od r_1 do $\frac{\varepsilon}{2}$. Daje nam to:

$$(a) \quad \iint \frac{\sin \omega}{R^2} dR d\omega = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{s} \right) \cdot \int \sin \omega d\omega = \frac{2}{r_1} - \frac{4}{s}$$

Następnie całkując ją nazewnątrz kuli CCC w lewym obszarze przestrzeni, t. j. w granicach dla ω : od $\arccos\left(\frac{s}{2R}\right)$ do π , a dla R od $\frac{s}{2}$ do ∞ ; znajdujemy:

$$(b) \quad \iint \frac{\sin \omega}{R^2} dR d\omega = \int \left(\frac{1}{R^2} + \frac{s}{2R^3} \right) dR = \frac{3}{s}.$$

Dodając całki (a) i b) i mnożąc sumę przez 2, otrzymujemy pierwszą całkę wyrażenia (7), rozciągniętą na całą przestrzeń:

$$(9) \quad \iint \frac{\sin \omega}{R^2} dR d\omega = \frac{4}{r_1} - \frac{2}{s}.$$

Obliczając następną całkę wewnętrzną kuli CCC , otrzymujemy:

$$(a') \quad \begin{aligned} \iint \frac{R^2 \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} dR d\omega &= -\frac{1}{2s} \left[\int \frac{R}{(s+R)^2} dR - \int \frac{R}{(s-R)^2} dR \right] \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \log 9 \right) - \frac{r_1}{s^2 - r_1^2} + \frac{1}{4s} \log \left(\frac{s+r_1}{s-r_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Nazewnątrz kuli CCC w obszarze lewym mamy:

$$\int \int \frac{R^2 \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} dR d\omega = -\frac{1}{2s} \left[\int \frac{R}{(s+R)^2} dR - \int \frac{1}{R} dR \right]$$

$$(b') \quad = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \log 9 \right),$$

skąd suma całek (a') i (b'), pomnożona przez 2, daje nam całkę drugą wyrażenia (8), rozciągniętą na całą przestrzeń:

$$(10) \quad \int \int \frac{R^2 \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} dR d\alpha = \frac{2}{s} - \frac{2r_1}{s^2 - r_1^2} + \frac{1}{2s} \log \left(\frac{s+r_1}{s-r_1} \right)^2.$$

Przechodząc do trzeciej całki, zauważymy, że licznik ułamku podcałkowego jest pochodną mianownika względem zmiennej R , i dlatego, dla uproszczenia, całkować będziemy odmiennie, niż przy dwóch poprzednich całkach.

Przedewszystkiem rozciągniemy całkowanie na przestrzeń zawartą między płaszczyzną PQ i płaszczyzną $P'Q'$, równoległą do płaszczyzny PQ i przechodzącą przez środek A , czyli że będziemy całkowali w granicach: dla R od r_1 do $\frac{s}{2 \cos \omega}$, a dla ω od 0 do $\frac{\pi}{2}$, co nam daje:

$$\int \int \frac{(2R - 2s \cos \omega) \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} dR d\omega = -2 \left(\frac{2}{s} \right) \int \sin \omega \cos \omega d\omega$$

$$(a'') \quad - \int \frac{\sin \omega}{(r_1^2 - 2r_1 s \cos \omega + s^2)^{\frac{1}{2}}} d\omega = -2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 s} \sqrt{r_1^2 + s^2} \right).$$

Następnie całkujemy w lewym obszarze przestrzeni względem płaszczyzny $P'Q'$, t. j. w granicach: dla R od r_1 do ∞ , a dla ω od $\frac{\pi}{2}$ do π , skąd otrzymujemy:

$$\int \int \frac{(2R - 2s \cos \omega) \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} dR d\omega = -2 \left(- \int \frac{\sin \omega}{r_1^2 - 2r_1 s \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} d\omega \right)$$

$$(b'') \quad = -2 \left(\frac{1}{r_1 s} \sqrt{r_1^2 + s^2} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{s} \right).$$

Suma całek (a'') i (b''), pomnożona przez 2, da nam całkę trzecia rozciągniętą na całą przestrzeń:

$$(11) \quad \iint \frac{(2R-2s \cos \omega) \sin \omega}{(R^2-2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} dR d\omega = \frac{4}{s}.$$

Zastępując obecnie w wyrażeniu (8) całki ich wartościami (9), (10) i (11), otrzymujemy ilość energii pola wypadkowego dwóch elektronów jednakowego znaku:

$$e = \frac{h}{2k} \cdot \frac{\Phi^2}{8\pi} \left[\frac{4}{r_1} + \frac{4}{s} + \frac{2r_1}{s_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{2s} \log \left(\frac{s+r_1}{s-r_1} \right)^2 \right] \\ = 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{r_1} + 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s} + \frac{h\Phi^2}{16\pi k} \left[-\frac{2r_1}{s_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{2s} \log \left(\frac{s+r_1}{s-r_1} \right)^2 \right].$$

Promienie kul centralnych elektronów r_1 i r_2 uważamy za bardzo małe w stosunku do odległości s , a to między innymi dla tego, że kule te przy odległości bardzo małej ulegną przekształceniu i zamienią się na wydłużone powierzchnie obrotowe. Możemy tedy w ostatniem wyrażeniu pominąć trzeci wyraz i napisać na wartość energii e wzór:

$$(12) \quad e = 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{r_1} + 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s}.$$

Ponieważ w rozważaniach naszych nie wchodził w grę kierunek pól składowych, możemy przyjąć wyrażenie (12) jako odpowiadające obydwu znaków elektronom, w zależności od tego czy w wyrażeniu tem będzie r_1 lub r_2 . Tak że ostatecznie mamy na energię całkowitą pola wypadkowego dwóch elektronów dodatnich E_1 i ujemnych E_2 wyrażenia:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{r_1} + 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s} \\ e_2 = 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{r_2} + 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s} \end{array} \right.$$

Na zasadzie rozważań wstępnych, które doprowadziły nas do równania (1), znajdujemy wyrażenie na siłę działania między dwoma elektronami jednakowych znaków:

$$(14) \quad F = - \frac{de}{ds} = 2 \cdot \frac{h}{8\pi r} \cdot \frac{\Phi^2}{s^2}.$$

Siła ta jest niezależna od samego znaku obydwóch elektronów, jest dodatnia, czyli skierowana w kierunku s rosnącego, zatem jest odpychająca; co do wielkości, jest ona odwrotnie proporcjonalna do drugiej potęgi odległości, jak tego wymaga prawo Coulomba.

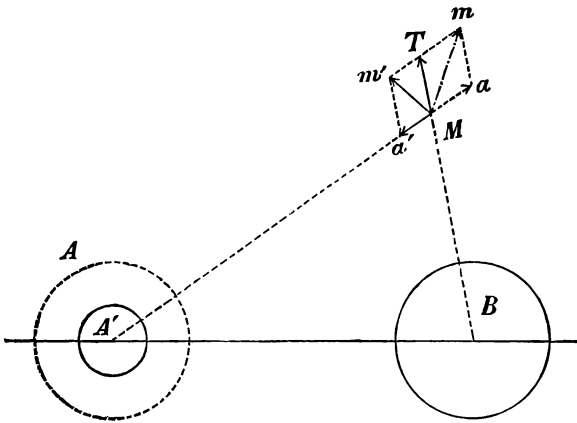


Fig. 2

IV. Przyciąganie. Rozważmy teraz dwa elektrony różnych znaków. Dajmy nato, że elektron dodatni A (fig. 2) został zastąpiony przez elektron ujemny A' . Wiadomo, że wielkość elektronu ujemnego jest znacznie mniejsza od wielkości elektronu dodatniego, tak że kula centralna elektronu ujemnego pomieści się wewnątrz kuli centralnej elektronu dodatniego. Ponieważ wielkość przepływu obydwóch elektronów dodatniego i ujemnego jest jednakowa, natężenie pola w danym punkcie M nie ulegnie zmianie, a zmieni się tylko kierunek pola tak, że w danym

punkcie poprzedni wektor a , odpowiadający polu elektronu dodatniego zostanie zastąpiony wektorem a' , równym wektorowi poprzedniemu, lecz skierowanym do środka. A więc wektor wypadkowy m zostanie zastąpiony wektorem wypadkowym m' .

Przypatrując się wzorowi (6) na pole wypadkowe w zależności od pól składowych, zauważymy, że zmiana kierunku pola jednego z elektronów nie zmienia żadnego z wyrazów tego wzoru, ecz zmienia jedynie znak wyrazu trzeciego, a to dla tego, że kąt α został zastąpiony jego dopełnieniem bMa' . Przechodząc od wyrażenia (6) do wyrażenia (8), zauważymy, że w niem wszystkie wartości całek pozostaną te same, i tylko zmienia się znak całki trzeciej. Pozatem nastąpi zmiana energii, odpowiadająca ilości energii zawartej w przestrzeni między kulą centralną r_1 i r_2 ; w pierwszym przypadku przestrzeń ta znajdowała się wewnątrz kuli centralnej, nie była zatem wypełniona polem energetycznym, w drugim zaś przypadku znajduje się ona nazewnątrz kuli centralnej, jest zatem wypełniona polem energetycznym. Zmiana ta wyrazi się sumą całek (8), rozciągniętych w przestrzeni między kulami centralnymi, t. j. wziętych w granicach: dla R od r_2 do r_1 , a dla ω od 0 do π . Dla pierwszej całki znajdujemy:

$$\pm \iint \frac{\sin \omega}{R^2} dR d\omega = \pm \left(\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1} \right).$$

Dla drugiej całki mamy:

$$\begin{aligned} & \pm \iint \frac{R^2 \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^2} dR d\omega \\ = & \pm \left[\frac{r_1}{s^2 - r_1^2} - \frac{r_2}{s^2 - r_2^2} + \frac{1}{4s} \log \left(\frac{s+r_2}{s-r_2} \right)^2 - \frac{1}{4s} \log \left(\frac{s+r_1}{s-r_1} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

Całka ta w tych granicach może być pominięta, ponieważ r_1 i r_2 są bardzo małe w stosunku do s .

Dla trzeciej całki mamy:

$$\pm \iint \frac{(2R - 2s \cos \omega) \sin \omega}{(R^2 - 2Rs \cos \omega + s^2)^{\frac{3}{2}}} dR d\omega = 0.$$

Tym sposobem ilość energii całkowitej pola wypadkowego dwóch elementów o znakach przeciwnych wyrazi się tak:

$$(15) \quad e' = \frac{h}{2\pi k} \Phi^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s^2}.$$

Znajdujemy stąd siłę, działającą między temi elektronami, na zasadzie (1):

$$(16) \quad F' = - \frac{dE'}{ds} = - 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi^2}{s^2}.$$

Siła ta jest ujemna, t. j. skierowana w stronę s malejącego—jest więc przyciągająca; ilościowo jest ona równa sile odpychającej pomiędzy dwoma elektronami jednakowymi i jest odwrotnie proporcjonalna do drugiej potęgi odległości, jak tego wymaga prawo Coulomba.

Jeżeli rozważymy jakiegokolwiek dwa środki o przepływach równych Φ_1 i Φ_2 i o promieniach kuli centralnych r_1 i r_2 , otrzymamy następujące wyrażenie na ilość pola wypadkowego:

$$(17) \quad e = \frac{h}{8\pi k} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \pm 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{s},$$

a siła, działająca między temi środkami, będzie miała wyrażenie

$$(18) \quad F = \pm 2 \cdot \frac{h}{8\pi k} \cdot \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{s^2};$$

gdzie znak $+$ odnosi się do przypadku kierunków jednakowych, a znak $-$ do przypadku przeciwnych kierunków pól.

Wyrażenie (18) jest analogiczne do ogólnego wzoru Coulomba, gdzie masa elektryczna została zastąpiona wielkością przepływów Φ_1 i Φ_2 .

Znajdźmy wymiary naszych stałych k i h . Z równania (2):

$$f = k\delta;$$

znajdujemy dla k :

$$[k] = [M](T^{-2}).$$

Z wyrażenia (3) znajdujemy dla h :

$$[h] = (L^{-3}).$$

W ten sposób otrzymaliśmy prawo C o u l o m b a w całej jego rozciągłości, wychodząc z naszej definicji.

Warto zauważyć, że siła F (18) jest niezależna od wielkości promieni r_1 i r_2 i pozostanie dla pól energetycznych takich, których kula centralna redukuje się do punktu geometrycznego.
