W. SIERPIŃSKI.

Wzór analityczny na pewną funkcyę liczbową.

Celem niniejszego artykułu jest dowód następującego twierdzenia:

Funkcya liczbowa $\tau_r(n)$, wyrażająca liczbę rozkładów liczby całkowitej, nie ujemnej n na sumę kwadratów r liczb całkowitych, rozwija się na szereg:

$$\tau_r(n) = \frac{(2r)^n}{n!}\left[a_0(n) + \frac{a_1(n)}{r} + \frac{a_2(n)}{r^2} + \ldots\ldots\right]$$

gdzie $a_i(n)$ oznacza wielomian całkowity względem n, stopnia $2i$, o spółczynnikach wymiernych, liczbowych (dla $i=0, 1, 2, \ldots\ldots$).

Oznaczmy przez $b_i(x)$ $(i=0,1,2,\ldots)$ wielomiany całkowite względem x, określone w następujący sposób:

$$b_0(x) = 1,$$

zaś dla $p=1,2,3,\ldots\ldots$:

$$(1)\quad b_p(x) = -\sum_{k=2}^{p+1}\frac{1}{k!}W_{p+1-k}(x) + 2\sum_{k=2}^{E\sqrt{p+1}}\frac{1}{2^{k^2}}W_{p+1-k^2}(x-k^2)+c_p,$$

gdzie $W_m(x)$ jest wielomianem całkowitym względem x, spełniającym równania:

$$(2)\qquad W_m(x)-W_m(x-1)=b_m(x)\text{[1]};\quad W_m(0)=0,\ \text{dla}\ m=0,1,2;\ldots,$$

zaś c_p oznacza stałą, tak wyznaczoną, iżby było:

$$(3)\qquad \tau_1(p)=2^p\left[b_p(p)+\frac{1}{1!}b_{p-1}(p)+\ldots\ldots+\frac{1}{p!}b_0(p)\right].\text{[2]}$$

Powyższe warunki wyznaczają w zupełności wielomiany $b_i(x)$ $(i=0,1,2,\ldots..)$; drogą indukcyi matematycznej moglibyśmy nadto z łatwością udowodnić, że $b_i(x)$ jest wielomianem stopnia i o spółczynnikach wymiernych. Wzory (1), (2), (3) mogą też słu żyć do kolejnego obliczania uważanych wielomianów.

Zakładając np. $p=1$, ze wzoru (1) znajdziemy:

$$b_1(x)=-\tfrac{1}{2}W_0(x)+c_1;$$

równania (2) dają na $W_0(x)$ warunki:

$$W_0(x)-W_0(x-1)=1,\quad W_0(0)=0,$$

skąd:

$$W_0(x)=x,$$

i przeto:

$$b_1(x)=-\frac{x}{2}+c_1.$$

Stałą c_1 powinniśmy tak wyznaczyć, iżby było:

$$\tau_1(1)=2[b_1(1)+b_0(1)],$$

czyli:

$$2=2[-\tfrac{1}{2}+c_1+1],$$

skąd:

$$c_1=\tfrac{1}{2}\quad\text{i przeto}\quad b_1(x)=-\frac{x-1}{2}.$$

---

[1]) Równanie to wskazuje, że stopień wielomianu $W_m(x)$ jest o jednośc wyższy od stopnia wielomianu $b_m(x)$.

[2]) Przez $\tau_1(0)$ należy rozumieć 1, zaś dla $p>0$: $\tau_1(p)=2(E\sqrt{p}-E\sqrt{p-1})$

Kładąc $p=2$ będziemy, na mocy (1), mieli:

$$b_2(x)=-\frac{1}{2}W_1(x)-\frac{1}{6}W_0(x)+c_2;$$

lecz $W_0(x)=x$, zaś na $W_1(x)$ mamy warunki:

$$W_1(x)-W_1(x-1)=-\frac{x-1}{2};\quad W_1(0)=0,$$

skąd, kładąc $W_1(x)=\alpha x^2+\beta x$, otrzymalibyśmy $\alpha=-\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$,
przeto $W_1(x)=-\frac{x(x-1)}{4}$, oraz:

$$b_2(x)=\frac{x(x-1)}{8}-\frac{x}{6}+c_2.$$

Stałą c_2 musimy wyznaczyć tak, iżby było:

$$\tau_1(2)=2^2[b_2(2)+b_1(2)+\tfrac{1}{2}b_0(2)],$$

czyli:

$$0=2^2\left[-\frac{1}{12}+c_2\right],\quad \text{skąd } c_2=\frac{1}{12},$$

przeto:

$$b_2(x)=\frac{x(x-1)}{8}-\frac{x}{6}+\frac{1}{12}=\frac{(x-2)(3x-1)}{24}\ \text{i t. d.}$$

Załóżmy dalej:

$$a_0(x)=1, \tag{4}$$

oraz

$$a_i(x)=x(x-1)\ldots\ldots(x-i+1)b_i(x).\qquad (i=1,2,3,\ldots)$$

Z łatwością widzimy, iż $a_i(x)$ $(i=0,1,2,\ldots)$ jest wielomianem całkowitym stopnia $2i$ o spółczynnikach wymiernych.

Oznaczmy:

$$f_r(n)=\frac{(2r)^n}{n!}\left[a_0(n)+\frac{a_1(n)}{r}+\frac{a_2(n)}{r^2}+\ldots\ldots\right]. \tag{5}$$

ponieważ, na mocy wzoru (4), przy wszelkiem całkowitem $n\geqq 0$ dla $i>n$ mamy stale:

$$a_i(n)=0,$$

przeto szereg $f_r(n)$ przy wszelkiem całkowitem, nieujemnem n będzie napewno zbieżny i możemy napisać:

$$(6) \qquad f_r(n) = \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} a_i(n) r^{n-i}.$$

Kładąc w tym wzorze $r=1$ i biorąc pod uwagę, iż na mocy (4):

$$a_i(n) = \frac{n!}{(n-i)!} b_i(n), \qquad (\text{dla } i=0,1,\dots n)^{1)}$$

znajdziemy:

$$f_1(n) = 2^n \sum_{i=0}^{n} \frac{b_i(n)}{(n-i)!},$$

co, przez porównanie ze wzorem (3), daje:

$$(7) \qquad f_1(n) = \tau_1(n)$$

przy wszelkiem całkowitem, nieujemnem n.

Załóżmy, że mamy:

$$(8) \qquad f_r(n) = \tau_r(n);$$

okażemy, że będziemy mieli:

$$f_{r+1}(n) = \tau_{r+1}(n).$$

W tym celu zauważmy, że:

$$\tau_{r+1}(n) = \tau_r(n) + 2 \sum_{k=1}^{E\sqrt{n}} \tau_r(n-k^2),$$

a więc, na mocy (8):

$$\tau_{r+1}(n) = f_r(n) + 2 \sum_{k=1}^{E\sqrt{n}} f_r(n-k^2).$$

Prawa strona napisanej równości jest, na mocy (6), sumą wielomianów całkowitych względem r; po łatwej redukcyi, otrzymamy:

$$(9) \qquad \tau_{r+1}(n) = 2^n \sum_{i=0}^{n} K_i(n) \frac{r^{n-i}}{(n-i)!},$$

---

1) Przez 0! należy rozumieć jedność.

gdzie:

$$K_i(n) = b_i(n) + 2\sum_{k=1}^{E\sqrt{i}} b_{i-k^2}(n-k^2).$$

Z drugiej strony, kładąc we wzorze (6) $r+1$ zamiast r, i porządkując podług malejących potęg liczby r, otrzymamy:

$$f_{r+1}(n) = 2^n \sum_{i=0}^{n} L_i(n) \frac{r^{n-i}}{(n-i)!}, \tag{10}$$

gdzie:

$$L_i(n) = \sum_{k=0}^{i} \frac{b_{i-k}(n)}{k!}.$$

Powiadamy, że przy wszelkiem całkowitem nieujemnem n oraz wszelkiem całkowitem, nieujemnem $i \leqslant n$:

$$L_i(n) = K_i(n).$$

Załóżmy najprzód, że $i > 1$ i obliczmy różnicę:

$$b_{i-1}(n) - b_{i-1}(n-1),$$

na mocy wzoru (1), Biorąc pod uwagę wzór (2), otrzymamy z łatwością:

$$b_{i-1}(n) - b_{i-1}(n-1) = -\sum_{k=2}^{i} \frac{1}{k!} b_{i-k}(n) + 2\sum_{k=2}^{E\sqrt{i}} \frac{1}{2^{k^2}} b_{i-k^2}(n-k^2),$$

albo:

$$\sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k!} b_{i-k}(n) = b_i(n) + 2\sum_{k=1}^{E\sqrt{i}} \frac{1}{2^{k^2}} b_{i-k^2}(n-k^2),$$

czyli:

$$L_i(n) = K_i(n), \quad \text{dla} \quad i > 1.$$

Lecz dla $i=0$ mamy:

$$K_0(n) = b_0(n), \quad \text{oraz} \quad L_0(n) = b_0(n),$$

więc:

$$L_0(n) = K_0(n),$$

zaś dla $i = 1$:

$$K_1(n) = b_1(n) + b_0(n-1), \quad L_1(n) = b_1(n) + b_0(n),$$

przeto, ponieważ $b_0(n) = b_0(n-1)$:

$$L_1(n) = K_1(n).$$

Równość:

$$L_i(n) = K_i(n),$$

zachodzi więc przy wszelkiem całkowitem, nie ujemnem $i \leqslant n$; c. b. d. o.

Mamy więc, na mocy (9) i (10):

$$\tau_{r+1}(n) = f_{r+1}(n).$$

Jeżeli zatem równość $\tau_r(n) = f_r(n)$ zachodzi dla pewnego (naturalnie całkowitego, dodatniego) r, to zachodzić będzie i dla r o jedność większego, a że, na mocy wzoru (7) zachodzi dla $r = 1$, przeto zachodzić musi całkiem ogólnie, t. j. na mocy wzoru (5):

$$(11) \qquad \tau_r(n) = \frac{(2r)^n}{n!}\left[a_0(n) + \frac{a_0(n)}{r} + \frac{a_2(n)}{r^2} + \ldots\ldots\right],$$

przy wszelkiem całkowitem, dodatniem r, oraz wszelkiem całkowitem, nieujemnem n.

Oto wyrażenie na kilka pierwszych spółczynników wypisanego rozwinięcia:

$$a_0(n) = 1,$$

$$a_1(n) = -\frac{n(n-1)}{2},$$

$$a_2(n) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{24},$$

$$a_3(n) = -\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n+2)}{48}$$

Rozwinięcie tego samego kształtu co (11) daje funkcya liczbowa:

$$\varphi_r(n) = \tau_r(0) + \tau_r(1) + \ldots\ldots + \tau_r(n),$$

wyrażająca liczbę wszystkich całkowitych rozwiązań nierówności:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots x_r^2 \leqslant n.$$

Mamy mianowicie:

$$\varphi_r(n) = \frac{(2r)^n}{n!}\left[A_0(n) + \frac{A_1(n)}{r} + \frac{A_2(n)}{r^2} + \ldots\ldots\right],$$

gdzie:

$$A_0(n) = 1,$$

$$A_1(n) = -\frac{n(n-2)}{2},$$

$$A_2(n) = \frac{n(n-1)(3n^2-13n+20)}{24},$$

i t. d., ogólnie:

$$A_i(n) = a_i(n) + \frac{n}{2} A_{i-1}(n-1).$$

Getynga, d. 24. VI 1907.