W. SIERPIŃSKI.

O pewnym przypadku błędnego stosowania zasady mnożenia prawdopodobieństw.

W 96-tym tomie „Comptes Rendus“ (z roku 1883) J. J. Sylvester z Baltimore, członek korespondent Akademii, w artykule „Sur les nombres de fractions ordinaires inégales qu'on peut exprimer en se servant de chiffres qui n'excèdent pas un nombre donné“, posługując się metodą analogiczną do tej, której użył Czebyszew w „Mémoire sur les nombres premiers“, oblicza wartość przybliżoną funkcyi

$$J(x) = \sum_{n>0}^{n \leqslant x} T(n),$$

oznaczając przez $T(n)$ liczbę liczb pierwszych względem n i nie większych od n.

Autor wykazuje, iż:

$$\lim_{x=\infty} \frac{J(x)}{x^2} = \frac{3}{\pi^2}.$$

i wyprowadza stąd wniosek, iż prawdopodobieństwo, że dwie liczby, których górna granica jest liczbą bardzo wielką, będą względnie pierwszemi, jest $\frac{6}{\pi^2}$. Sylvester przytacza następnie uwagę Franklina, „że wniosek ten może być conajmniej potwierdzony, może nawet w zupełności udowodniony, w sposób następujący:

Skoro x jest bardzo wielkie, prawdopodobieństwo, że dwie liczby, mniejsze od x, wzięte na chybił trafił, nie będą jednocześnie podzielne przez liczbę pierwszą p, będzie $1+\frac{1}{p^2}$ (oczywista pomyłka w druku, powinno być: $1-\frac{1}{p^2}$). Stąd, szukane prawdopodobieństwo będzie:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\ldots\ldots;$$

co jest odwrotnością liczby:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\ldots,$$

zatem jest ono równe $\frac{6}{\pi^2}$. "

Wzór w postaci iloczynu, podany na prawdopodobieństwo, jest rzeczywiście prawdziwy asymptotycznie, ale tylko asymptotycznie, gdyż przy skończonem x ani prawdopodobieństwo, że dwie liczby mniejsze od x nie posiadają wspólnego dzielnika p, nie jest dokładnie $1-\frac{1}{p^2}$, ani też nie możemy stosować zasady mnożenia prawdopodobieństw, gdyż zjawiska niepodzielności przez kilka liczb danych nie są od siebie niezależne.

Czy na ostatnią okoliczność zwrócił Franklin uwagę, z przytoczonego ustępu wywnioskować niepodobna; w każdym razie przeoczył ją Bachmann, podając w swej „Analitycznej Teoryi liczb" rozumowanie Franklina, ale już w postaci skończonej [1]:

„Szukajmy prawdopodobieństwa, iż dwie liczby $x, y \leqslant n$ są względnie pierwsze. Ponieważ zarówno x jak y może oznaczać każdą z n liczb $1, 2, 3, \ldots, n$, liczba wszystkich możliwych przypadków jest n^2. Pomiędzy niemi jest $\left[\frac{n}{p}\right]^2$ przypadków, w których x, y jednocześnie podzielne są przez liczbę pierwszą $p \leqslant n$, a więc $n^2-\left[\frac{n}{p}\right]^2$ będzie liczbą przypadków, w których okoliczność ta nie zachodzi; odpo-

[1]) Zahlentheorie II, Leipzig 1894, str. 430.

wiednie prawdopodobieństwo będzie zatem $1 - \left[\frac{n}{p}\right]^2 \cdot \frac{1}{n^2}$. Jeżeli teraz $2, 3, 5, \ldots, q$ są wszystkie liczby pierwsze $\leqslant n$, to prawdopodobieństwo, że x, y są liczby względnie pierwsze, będzie prawdopodobieństwem złożonem, że liczby owe nie są obie podzielne przez żadną z tych liczb pierwszych, i na mocy prawideł Rachunku prawdopodobieństwa jest:

$$W = \prod_{p=2}^{q}\left(1 - \left[\frac{n}{p}\right]^2 \frac{1}{n^2}\right)."$$

Otóż wzór ten jest błędny, powinno być:

$$W = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{x}\right]^2.$$

gdzie $\mu(k)$ oznacza znaną funkcyę Mertensa, równą jedności dodatniej lub ujemnej, stosownie do tego, czy k składa się z liczby parzystej lub nieparzystej czynników pierwszych różnych, oraz równą zeru dla przypadków, kiedy k posiada dzielnik kwadratowy, większy od jedności [1].

[1] Wzór ten wyprowadzić można z łatwością ze wzoru:

$$W = \frac{2\Phi(n) - 1}{n^2}.$$

podanego przez Bachmanna na tejże 430-ej stronicy, biorąc pod uwagę, iż na $\Phi(n)$ na str. 427 mamy wzór:

$$\Phi(n) = \tfrac{1}{2} \sum_{1}^{n} \mu(k)\left(\left[\frac{n}{k}\right]^2 + \left[\frac{n}{k}\right]\right),$$

oraz że:

$$\sum_{1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{k}\right] = 1,$$

patrz tamże, str. 321. (Obliczając na str, 427 wartość asymptotyczną funkcyi $\Phi(n)$, Bachmann zupełnie niepotrzebnie oblicza wartość przybliżoną szeregu $\sum_{1}^{n} \mu(k) \left[\frac{n}{k}\right]$, której znamy wartość dokładną).

Błędność wzoru wykażę na przykładzie $n=3$. Mamy tu 9 przypadków:

$$(1,1);\ (1,2);\ (1,3)$$
$$(2,1);\ (2,2);\ (2,3)$$
$$(3,1);\ (3,2);\ (3,3);$$

w 8-miu z nich (mianowicie we wszystkich oprócz przypadku (2,2), liczby x, y nie dzielą się obie jednocześnie przez liczbę pierwszą 2; w 8-miu również (we wszystkich oprócz (3,3)) liczby x, y nie dzielą się jednocześnie przez 3; prawdopodobieństwo każdego z tych zjawisk jest więc $\frac{8}{9}$, lecz wyliczone dla jednego któregokolwiek z tych zjawisk w przypuszczeniu, że drugie zachodzi, jest tylko $\frac{7}{8}$; zjawiska nie są od siebie niezależne. Wzór B a c h m a n n a na W da nam wartość $\frac{64}{81}$, gdy tymczasem w rzeczywistości jest $W=\frac{7}{9}$.