E. CESÀRO.

Nowa metoda wyprowadzenia wzorów Trygonometryi kulistej.[1]

W metodzie niniejszej nie robimy żadnych założeń o wielkości ścian a, b, c kąta trójściennego, daje więc ona wzory ogólne—i co najważniejsza—pozwala wyprowadzić je bezpośrednio z dwóch trójkątów prostoliniowych, których boki i kąty są funkcyami elementów kąta trójściennego; innemi słowy, przy pomocy wzorów Trygonometryi płaskiej dostajemy bezpośrednio wzory Trygonometryi kulistej, nie posiłkując się przy wyprowadzaniu wzorów jednych wzorami innemi. Analogie Nepera i wzory Delambre'a odczytujemy wprost, że tak powiem, na samym kącie trójściennym, wzory zaś Eu-,lera i Lhuiliera otrzymujemy, stosując do jednego z rzeczonych trójkątów wzory Trygonometryi płaskiej, dające dostawę kąta lub styczną połowy kąta trójkąta w funkcyi boków.

Trójkąt elementów.

Na krawędziach kąta trójściennego, od jego wierzchołka S począwszy, odmierzamy odległości (rys: 1):

$$SD = SE = SH = 1;$$

boki otrzymanego w ten sposób trójkąta są: $2\sin\frac{a}{2}$, $2\sin\frac{b}{2}$, $2\sin\frac{c}{2}$.

---

[1]) Z Buletynów Akademii belgijskiej 1905 r., przełożył za upoważnieniem autora W. Bóbr.

W punkcie K budujemy kąt płaski kąta dwuściennego A; proste KL i KM, prostopadłe do krawędzi SD, zawsze spotykają podstawy trójkątów równoramiennych SDH, SDE, bez względu na wielkość ścian kąta bryłowego.

1°. Prosta ML jest przeciwrównoległa do prostej EH, o czem przekonywamy się z łatwością, wykreśliwszy linie Sh i Se środkowe trójkątów SDE, SDH. Otrzymane czworokąty $SKLh$, $SKMe$, dają się wpisać w koło, mamy więc: $Dh . DL = DS . DK = De . DM$, a zatem: $DH . DL = DE . DM$.

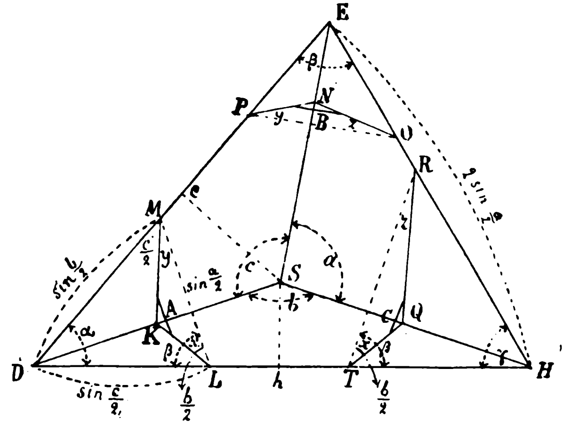


Fig. 1.

Jeżeli więc przyjmiemy, że $ML = \sin \frac{a}{2}$, na zasadzie wyprowadzonej równości będzie: $DL = \sin \frac{c}{2}$, $DM = \sin \frac{b}{2}$.

2°. Kąty L, M trójkąta LKM są prostemi funkcyami kątów dwuściennych kąta trójściennego. Rzeczywiście, zbudujmy w punkcie Q (fig. 1) kąt płaski kąta dwuściennego C i łącząc R z T, otrzymujemy prostą RT, przeciwrównoległą do prostej DE; kąty trójścienne $LMKD$, $TRQH$ mają dwie ściany (β i $KLD = QTH = \frac{b}{2}$), zawierające jeden i ten sam kąt dwuścienny (utworzony przez ścianę SDL z płaszczyzną EDH), przeto i pozostałe ich ściany są sobie równe. Budując płaski kąt dwuściennego B w punkcie N, z łatwością się przekonamy, w tenże sam sposób, że kąty y i z, są też sobie równe.

Z tego wnioskujemy, że:

$$x + y = 180^0 - A,$$
$$y + v = 180^0 - B,$$
$$x + z = 180^0 - C;$$

skąd, kładąc jak zwykle:

$$x + y + z - 180^0 = 2E,$$

dostajemy:

$$x = B - E;$$
$$y = C - E;$$
$$z = A - E.$$

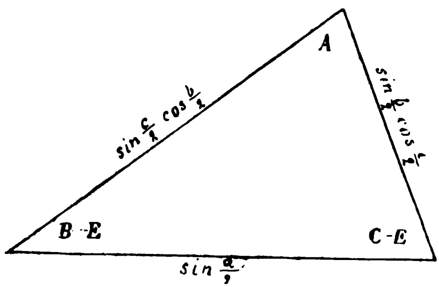


Fig. 2.

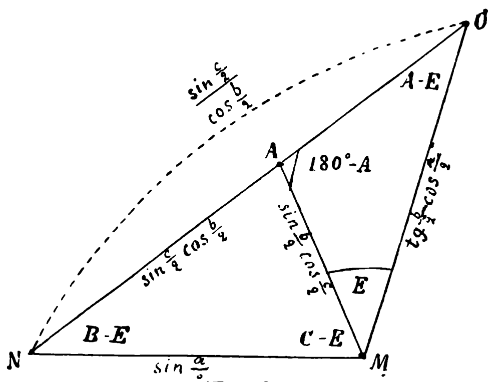
Widzimy więc, że trójkąt KML zawiera wszystkie elementy kąta trójściennego, kąty jego są: A, $B-E$, $C-E$, co zaś do boków; to $KL = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}$; $KM = \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$; $LM = \sin\frac{a}{2}$. Trójkąt ten (przedstawiony na fig. 2) nazywać będziemy **trójkątem elementów.** Stosując do mego wzory Trygonometryi płaskiej, otrzymamy wzory Trygonometryi kulistej. A zatem:

Jeżeli zbudujemy trójkąt płaski, którego kątami są kąty dwuścienne kąta trójściennego, z których dwa są zmniejszone o połowę nadmiaru kulistego, t. j. kąty A, $B-E$, $C-E$, to boki im przeciwległe będą proporcyonalne odpowiednio do $\sin\frac{a}{2}$ $\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$; $\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}$.

Trójkąt pochodny.

Zestawienie dwóch trójkątów elementów da nam nowy trójkąt płaski, którego jednym z kątów będzie połowa nadmiaru kulistego.

Przez wierzchołek M (fig. 3) trójkąta elementów NAM, odpowiadającego kątowi dwuściennemu A, poprowadźmy prostą MO, tworzącą kąt E z prostą AM. Trójkąt NMO jest trójkątem elementów, odpowiadających kątowi dwuściennemu C, gdyż kąty jego są: C, $A-E$, $B-E$; boki więc przeciwległe są proporcyonalne odpowiednio do $\sin\frac{c}{2}$, $\sin\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2}$, $\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}$, a ponieważ bok NM prze-



iF g. 3.

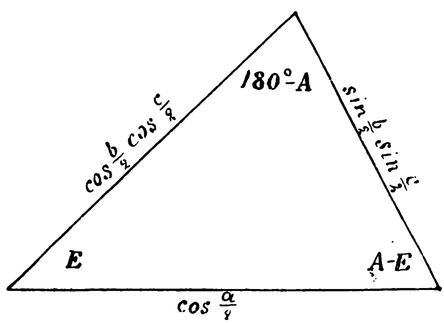
ciwległy kątowi $A-E$ jest równy $\sin\frac{a}{2}$, dzielimy więc pozostałe boki przez $\cos\frac{b}{2}$ i będzie $NO = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{b}{2}}$; $MO = \operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}$. Trzeci bok trójkąta MAO, który nazwiemy **trójkątem pochodnym**, jest: $AO = \frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{b}{2}} = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2} = \sin\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}$. Podzieliwszy boki trójkąta pochodnego przez $\operatorname{tg}\frac{b}{2}$, otrzymamy wynik, przedstawiony na fig. 4. A zatem:

Jeśli zbudujemy trójkąt płaski, mający jako kąty: 1^0 spełnienie kąta dwuściennego kąta trójściennego; 2^0 tenże kąt dwuścienny, zmniejszony o połowę nadmiaru kulistego; 3^0 nadmiar kulisty, t. j. kąty $180^0—A$, $A—E$, E,—to boki przeciwległe będą proporcyonalne odpowiednio do $\cos\frac{a}{2}$; $\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$; $\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$.

Z tych oto dwóch trójkątów plaskich wyprowadzimy bezpośrednio wszystkie wzory Trygonometryi kulistej [3].

Analogie Nepera.

Wziąwszy pod uwagę, że różnica kątów przy podstawie trójkąta elementów (fig. 2) jest $B—C$ i że w trójkącie płaskim stosunek stycznej



Fig, 4.

połowy różnicy dwóch kątów do stycznej ich sumy (lub do dotycznej połowy trzeciego kąta) równa się stosunkowi różnicy boków do ich sumy, mamy:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}.$$

[1]) Tu moglibyśmy dodać jeszcze dwa trójkąty, odpowiadające trójkątowi kulistemu biegunowemu, jest to jednak zbyteczne, gdyż łatwo możemy zastąpić a przez $180^0—A$ i odwrotnie, we wzorach, otrzymanych przy pomocy dwóch pierwszych trójkątów.

Taż sama własność trójkąta płaskiego w zastosowaniu do trójkąta pochodnego daje:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}.$$

Stosując te wzory do kąta kulistego biegunowego, otrzymamy pozostałe dwie analogie.

Wzory Delambre'a.

Proporcyonalność boków do wstaw kątów przeciwległych daje nam w trójkącie elomentów:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin(B-E)}=\frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)}$$

$$=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin(B-E)+\sin(C-E)}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin(B-E)-\sin(C-E)},$$

czyli:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B-C}{2}},$$

stąd mamy:

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{a}{2}};\quad\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Tym samym sposobem z trójkąta pochodnego możemy wyprowadzić pozostałe wzory Delambre'a.

Wzór Eulera.

$$\cos E=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

By go otrzymać, dość obliczyć w trójkącie pochodnym (fig 4) dostawę kąta E w zależności od boków. Mamy więc:

$$\sin^2\frac{b}{2}.\sin^2\frac{c}{2}=\cos^2\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}-2\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos E;$$

$$4\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}.\cos E=2\cos^2\frac{a}{2}+2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$=1+\cos a+\cos b+\cos c.$$

Wzór Lhuiliera.

$$\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}=\operatorname{tg}\frac{p}{2}.\operatorname{tg}\frac{p-a}{2}.\operatorname{tg}\frac{p-b}{2}.\operatorname{tg}\frac{p-c}{2}.$$

W trójkącie pochodnym obliczamy styczną połowy kąta E w zależności od boków. W tym celu możemy albo postąpić jak wyżej i obliczyć $\sin^2\frac{E}{2}$ i $\cos^2\frac{E}{2}$ w funkcyi boków, albo też bezpośrednio użyć wzoru:

$$\operatorname{tg}^2\frac{A'}{2}=\frac{(p'-b')(p'-c')}{p'(p'-a)};$$

dającego kąt A' trójkąta płaskiego, którego boki są: a'. b', c' i obwód $2p'$. W naszym przypadku jest:

$$2p'=\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b-c}{2};\quad 2p'-2a'=\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b+c}{2};$$

$$2p'-2b'=\cos\frac{b-c}{2}-\cos\frac{a}{2};\quad 2p'-2c'=\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{b+c}{2};$$

a zatem:

$$\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}-\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}+\cos\frac{a}{2}}.\frac{\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\cos\frac{b+c}{2}};$$

a ponieważ:

$$\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2},$$

mamy więc:

$$\mathrm{tg}^2\frac{E}{2}=\mathrm{tg}\frac{a+b-c}{2}\,.\,\mathrm{tg}\frac{c-b+a}{2}\,.\,\mathrm{tg}\frac{a+b+c}{2}\,.\,\mathrm{tg}\frac{b+c-a}{2}\ \text{i t. d.}$$

Związki między czterema elementami trójkąta.

a) Związek miedzy trzema bokami trójkąta i jednym z jego kątów.

Związek między trzema bokami i kątem A w trójkącie płaskim elementów jest:

$$\sin^2\frac{a}{2}=\sin^2\frac{b}{2}\,.\,\sin^2\frac{c}{2}+\sin^2\frac{c}{2}\cos^2\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sin b\,.\,\sin\,.\,c\cos A\,.$$

co, po pomnożeniu przez 2, daje:

$$1-\cos a=(1+\cos c)\sin^2\frac{b}{2}+(1-\cos c)\cos^2\frac{b}{2}-\sin b\,.\,\sin c\cos A,$$

$$=1-\cos c\,.\,\cos b-\sin b\,.\,\sin c\,.\,\cos A\,,$$

$$\cos a=\cos b\,.\,\cos c+\sin b\,.\,\sin c\,.\,\cos A\,.$$

Uwaga. Gdy chodzi nam o obliczenie kąta w funkcyi boków, możemy zastosować bezpośrednio do trójkąta elementów który bądź ze wzorów, dających połowę kąta w zależności od boków, jak np.:

$$\cos^2\frac{A'}{2}=\frac{p'(p'-a')}{b'c'}\,.$$

W naszym przypadku mamy:

$$2p'=\sin\frac{b+c}{2}+\sin\frac{a}{2}=2\sin\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\,,$$

$$2p'-2a'=\sin\frac{b+c}{2}-\sin\frac{a}{2}=2\sin\frac{p-a}{2}\,.\,\cos\frac{p}{2}\,,$$

skąd:

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\,.\,\sin c}\,.$$

b) Związek między dwoma bokami i kątami przeciwległemi:

W trójkącie elementów (A) mamy:

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)};$$

w trójkącie zaś (B):

$$\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin(C-E)}\ ^{1)};$$

podzieliwszy te równości jednę przez drugą stronami odpowiedniemi otrzymamy:

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}.$$

c) Związek między trzema kątami i jednym z boków.

We wzorze

$$\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)}$$

zastąpmy c przez a i naodwrót:

$$\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin C}=\frac{\sin\frac{a}{2}\,.\,\cos\frac{b}{2}}{\sin(C-E)};$$

następnie, pomnożywszy przez siebie te równości stronami odpowiedniemi, dostaniemy wzór:

$$\cos^2\frac{b}{2}=\frac{\sin(A-E)\sin(C-E)}{\sin A\,.\,\sin C}.$$

---

[1]) To jest—zastępując a przez b i naodwrót.

Dla nadania mu postaci zwykłej, znieśmy mianownik, pomnóżmy obie strony przez 2 i zastąpmy podwójny iloczyn wstaw po drugiej stronie różnicą dostaw; będzie:

$$(1+\cos b)\sin A \,.\, \sin C = \cos(A-C) + \cos B,$$

$$\cos C = -\cos A \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos b.$$

d) Związek między dwoma bokami, kątem między niemi zawartym i kątem jednemu z boków przeciwległym.

Najprostszym sposobem otrzymania wzoru

$$\operatorname{cotg} a \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos C + \sin C \,.\, \operatorname{cotg} A$$

jest wyrugowanie kąta B z dwóch analogij Nepera (wyprowadzonych z trójkąta elementów i trojkąta pochodnego),

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},$$

co uskuteczniamy z łatwością, wychodząc z równości:

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2},$$

zatem:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \,.\, \frac{\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} + \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}}{1 - \operatorname{cotg}^2\dfrac{C}{2} \,.\, \dfrac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}};$$

$$\operatorname{tg} A = \sin C \,.\, \frac{\sin a}{\sin(a+b) \,.\, \sin^2\frac{C}{2} - \sin(a-b)\cos^2\frac{C}{2}};$$

$$= \sin C \,.\, \frac{\sin a}{\cos a \,.\, \sin b - \sin a \,.\, \cos b \,.\, \cos C};$$

$$\operatorname{cotg} a \,.\, \sin b = \cos b \,.\, \cos C + \sin C \,.\, \operatorname{cotg} A.$$

U w a g a. Związek b) między dwoma bokami i kątami przeciwległemi możemy też otrzymać następującemi dwiema drogami.

α) Trójkąt pochodny (fig. 4) daje:

$$\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}}{\sin E};$$

mnożąc obydwie strony równości przez $2\sin\frac{a}{2}$, dostaniemy:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\,.\,\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}}{\sin E}.$$

β) Wyrugowawszy C z dwóch analogij N e p e r a, dających zwiazek między A, B, C, a, b, mamy:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}};$$

skąd, na zasadzie, iż

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$$

będzie:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

Metoda powyższa daje nam też możność otrzymania bezpośrednio, to jest bez uciekania się do wzorów Trygonometryi kulistej, wzorów na promienie kół stycznych wewnętrznie i zewnętrznie do trójkąta kulistego i opisanego na trójkącie kulistym, gdyż wysokości płaskich trójkątów elementów i pola ich są prostemi funkcyami tych promieni.

Pole trójkątów elementów i trójkątów pochodnych.

Z łatwością przekonać się możemy, iż 6 zbudowanych przez nas trójkątów płaskich mają pola równe. Rzeczywiście, każdy z trójkątów elementów jest równoważny ze swym pochodnym.

$$(1) \qquad S = \frac{1}{8} \sin b \,.\, \sin c \,.\, \sin A\,,$$

około wierzchołków A i $180^0—A$. Prócz tego trzy trójkąty pochodne mają około wierzchołka E pole jednakie:

$$(2) \qquad S = \frac{1}{2} \cos\frac{a}{2} \,.\, \cos\frac{b}{2} \,.\, \cos\frac{c}{2} \sin E$$ [1].

Pole to obliczone dla jednego z sześciu trójkątów płaskich w funkcyi boków, jest:

$$(3) \qquad S = \frac{1}{4}\sqrt{\sin p \,.\, \sin(p-a) \,.\, \sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}\,.$$

By otrzymać S w funkcyi kątów, możemy w równaniu (2) zastąpić iloczyn $\cos\frac{a}{2} \,.\, \cos\frac{b}{2} \,.\, \cos\frac{c}{2}$ odpowiedniem wyrażeniem w funkcyi kątów; z trójkąta pochodnego mamy:

$$\frac{\cos\frac{b}{2} \,.\, \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\sin(A-E)}{\sin A}\,.$$

Pomnożenie odpowiednich stron wzorów, analogicznych ostatniemu da nam iloczyn szukany i będzie:

$$S = \frac{\sin E \,.\, \sin(A-E) \,.\, \sin(B-E) \,.\, \sin(C-E)}{2 \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}\,.$$

Promień koła opisanego na trójkącie kulistym.

Od wierzchołka O kąta bryłowego począwszy, odcinamy na krawędziach jego odległości $OA=OB=OC=1$ i budujemy w punkcie K

---

[1]) Pole każdego z sześciu trójkątów płaskich kąta bryłowego spełniającego jest: $S_p = \frac{1}{8} \sin B \,.\, \sin C \,.\, \sin a = \frac{\sin A}{\sin a} \,.\, S$.

(fig. 5) trójkąt elementów, którego podstawa $LM = \sin\frac{a}{2}$. Linia OI, prostopadła do płaszczyzny ABC, jest nachylona do wszystkich trzech krawędzi kąta trójściennego pod jednakowym kątem ϱ, odpowiadającym promieniowi kulistemu koła małego na kuli o środku O, promieniu 1 i przechodzącego przez punkty A, B, C.

Płaszczyzna AOI, określona przez linie prostopadłe do płaszczyzn ABC, KLM, jest również prostopadła do linii ML przecięcia tych dwóch płaszczyzn L, prosta zaś KN jest wysokością trójkąta elementów. Mamy więc $KN = AK \operatorname{cotg} \varrho$ i $AK = \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$.

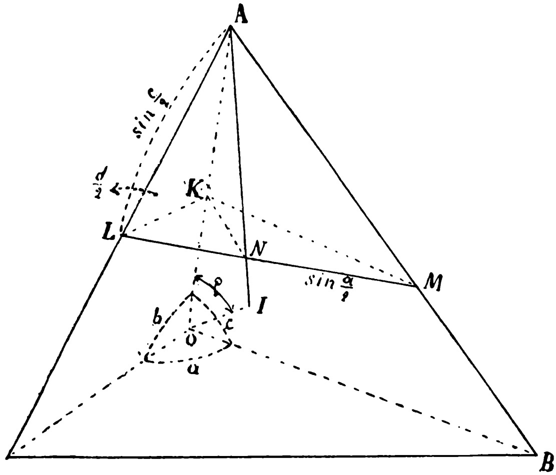


Fig. 5.

A zatem wysokość trójkąta elementów, wychodząca z wierzchołka A (fig. 6), ma długość:

$$h_a = \sin\frac{b}{2} \,.\, \sin\frac{c}{2} \operatorname{cotg} \varrho. \tag{4}$$

Możemy więc w trójkącie elementów, posiłkując się wyłącznie wzorami Trygonometryi płaskiej, obliczyć promień kulisty koła, opisanego na trójkącie kulistym.

Pomnożywszy obydwie strony równania (4) przez $\sin\frac{a}{2}$, możemy napisać:

$$2S = \sin\frac{a}{2}\,.\,\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}\,.\,\mathrm{cotg}\,\varrho\,. \tag{5}$$

Przyrównywając prawą stronę tego równania do iloczynu dwóch jakichkolwiek boków jednego z sześciu trójkątów płaskich przez wstawę kąta między niemi zawartego, otrzymamy rozmaite wzory na ϱ.

A zatem: a) obliczając $2S$ naokoło kąta E jednego z trójkątów pochodnych, mamy:

$$\mathrm{cotg}\,\varrho = \mathrm{ctg}\frac{a}{2}\,.\,\mathrm{cotg}\frac{b}{2}\,.\,\mathrm{cotg}\frac{c}{2}\,.\sin E, \tag{6}$$

b) otrzymamy ϱ w funkcyi boków, zastępując w równaniu (5) pole

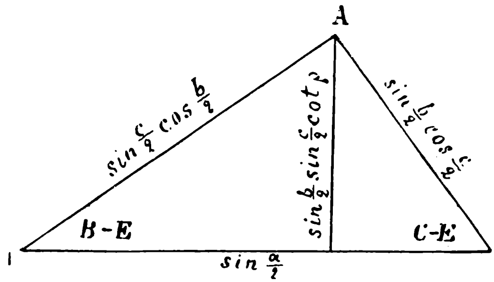


Fig. 6.

trójkąta elementów przez wzór (3); wyrażamy je wtedy w funkcyi boków, a więc:

$$\mathrm{cotg}\,\varrho = \frac{\sqrt{\sin p\,.\,\sin(p-a)\,.\,\sin(p-b)\,.\,\sin(p-c)}}{2\sin\frac{a}{2}\,.\,\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}}\,; \tag{7}$$

c) aby wyrazić ϱ w funkcyi kątów, możemy, dajmy na to, zastąpić w równaniu (6) iloczyn $\mathrm{cotg}\frac{a}{2}.\mathrm{cotg}\frac{b}{2}.\mathrm{cotg}\frac{c}{2}$ odpowiednim stosunkiem; obliczonym w trójkącie pochodnym bezpośrednio w funkcyi kątów, mamy zatem:

$$\mathrm{cotg}\,\varrho = \frac{1}{\sin E}\sqrt{\sin E\,.\,\sin(A-E)\,.\,\sin(B-E)\,.\,\sin(C-E)} \text{ i t. d.} \tag{8}$$

Promień r koła wpisanego.

Moglibyśmy łatwo dowieść, że pole S trójkąta elementów jest również funkcyą prostą promienia koła wpisanego [1]), co jest jednak zbyteczne wobec tego, że r z łatwością wyprowadzić możemy z ϱ.

Od ϱ do r przechodzimy na zasadzie następującego, prawie oczywistego twierdzenia:

Twierdzenie. Środek koła stycznego, wpisanego w trójkąt kulisty, jest jednocześnie środkiem koła, opisanego na trójkącie biegunowym, promienie zaś tych kół wzajemnie się dopełniają.

Stąd wnioskujemy, że dla przejścia od ϱ do r winniśmy zastąpić ϱ przez 90^0-r, zaś a, b, c, A, B, C odpowiednio przez 180^0-A, 180^0-B, 180^0-C, 180^0-a, 180^0-b, 180^0-c [2]).

W ten sposób z wzorów (6), (7) i (8) otrzymujemy:

$$(9)\left\{\begin{aligned}
&\operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\,.\operatorname{tg}\frac{B}{2}\,.\operatorname{tg}\frac{C}{2}\,;\\
&\operatorname{tg} r = \frac{\sqrt{\sin E\,.\sin(A-E)\,.\sin(B-E)\,.\sin(C-E)}}{2\cos\frac{A}{2}\,.\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\,;\\
&\operatorname{tg} r = \frac{1}{\sin p}\sqrt{\sin p\,.\sin(p-a)\,.\sin(p-b)\,.\sin(p-c)}\,.
\end{aligned}\right.$$

Promienie kół stycznych zewnętrznie.

Przedłużywszy boki trójkąta kulistego aż do ponownego ich przecięcia się, dostaniemy trzy nowe trójkąty; oznaczmy przez ρ_a i r_a promienie kół, opisanego na trójkącie i wpisanego w trójkąt, które otrzymujemy, przedłużając boki b i c. Ten trójkąt różni się od pierwotnego tem, iż b i c są zastąpione odpowiednio przez $\pi-b$ i $\pi-c$, B i C zaś przez $\pi-B$ i $\pi-C$.

---

[1]) $S=\frac{1}{4}\,.\sin p \operatorname{tg} r$.

[2]) E zastępujemy przez 180^0-p, $A-E$ przez $p-a$ i t. d.

Mamy więc wzory ogólne:

$$\varrho = f(a, b, c, A, B, C);$$

$$\frac{\pi}{2} - r = f(\pi-A, \pi-B, \pi-C, \pi-a, \pi-b, \pi-c);$$

$$\varrho_a = f(a, \pi-b, \pi-c, A, \pi-B, \pi-C);$$

$$\frac{\pi}{2} - r_a = f(\pi-A, B, C, \pi-a, b, c).$$

W ten sposób wzór (6) daje wzór (9), jako też:

$$\operatorname{cotg}\varrho_a = \operatorname{cotg}\frac{a}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{b}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{c}{2} \,.\, \sin(A-E);$$

$$\operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} \,.\, \operatorname{cotg}\frac{C}{2} \,.\, \sin(p-a), \text{ i t. d.}$$

Uwaga. Trójkąt, nazwany przez nas pochodnym, możemy otrzymać drogą, zupełnie odmienną od powyżej wskazanej, mianowicie:

Trójkąt pochodny jest trójkątem elementów kąta trójściennego, mającego jednę ścianę wspólną z rozpatrywanym przez nas trójkątem trójściennym, a którego krawędź jest przedłużeniem trzeciej krawędzi tego kąta trójściennego.

Istotnie, dajmy na to, że b jest ścianą wspólną, elementy więc nowego kąta trójściennego są:

$$180^0-a,\ b,\ 180^0-c,\ 180^0-A, B,\ 180^0-C,$$

nadmiar zaś kulisty (czyli przepełnienie) jest:

$$2E' = 2[B-E]\ ^{1)}.$$

Jeden więc z trójkątów elementów tego kąta trójściennego będzie miał kąty:

$$180^0-A,\ B-(B-E)=E;\quad 180^0-C-(B-E)=A-E.$$

co zaś do boków, to te otrzymamy, zastępując w trójkącie elementów (A) pierwszego kąta trójściennego a i c przez ich spełnienia, dostaniemy więc:

$$\cos\frac{a}{2};\ \sin\frac{b}{2} \,.\, \sin\frac{c}{2};\ \cos\frac{c}{2} \,.\, \cos\frac{b}{2}\,.$$

[1]) Widać to odrazu, bez rachunku, na kuli, gdyż dwa trójkąty kuliste, określające nasze kąty bryłowe, tworzą ze sobą taśmę kulistą B, której pole jest równe $2B$.