ZADANIE.

podał

A. Łaparewicz.

Dowieść, że w szeregu najmniejszych bezwzględnie reszt q $2q, \ldots, \frac{p-1}{2}q$ według modułu p, gdzie p i q są liczbami pierwszemi nieparzystemi, liczbę reszt ujemnych (μ) otrzymamy jako nadmiar sumy wyrazów o skaźnikach parzystych nad sumą wyrazów o wskaźnikach nieparzystych z pośród szeregu całkowitych części ilorazów p, $2p, \ldots, (q-1)p$ przez $2q$, t. j.

$$\mu = \sum_{s=1}^{i=q-1} (-1)^i E\left(\frac{ip}{2q}\right).$$

W szeregu p, $2p$, $3p, \ldots (q-1)p$ dwa wyrazy równooddalone od jego początku i końca, t. j. ip i $(q-i)p$, których najmniejszemi resztami dodatniemi według mod. $2q$ są r_i i r_{q-i}, dają się wyrazić w sposób następujący:

$$pi = 2qE\left(\frac{ip}{2q}\right) + r_i,$$

$$p(q-i) = 2qE\left(\frac{(q-i)p}{2q}\right) - r_{q-i},$$

a ich suma:

$$pq = 2q\left\{E\left(\frac{ip}{2q}\right) + E\,\frac{(q-i)p}{2q}\right\} + (r_i + r_{q-i}).$$

Stąd wnosimy, że $r_i + r_{q-i}$ jest nieparzystą wielokrotnością liczby q, zatem $= q$ lub $3q$, przyczem obie te reszty są jednocześnie $<$ lub $>q$. Przekształcając ostatnią równość na:

$$\frac{p-1}{2} = E\left(\frac{ip}{2p}\right) + E\left(\frac{(q-i)p}{2q}\right) + (0 \text{ lub } 1),$$

i stosując ją do wszystkich par powyższego szeregu, znajdujemy ostatecznie:

$$\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}=\sum_{i=1}^{i=q-1}E\left(\frac{ip}{2q}\right)+\nu,$$

gdzie ν jest liczbą wskazującą, ile razy przy powyższem sumowaniu powtarza się 1, t. j. w ilu parach powyższych wyrazów otrzymujemy reszty $> q$. Żastosowując więc z każdej pary tylko wyraz o wskaźniku parzystym, powiemy, że liczba ν odpowiada liczbie najmniejszych, większych od q, reszt według mod. $2q$ szeregu wyrazów:

$$2p,\ 4p,\ldots(q-1)\,p,$$

czyli, co wychodzi na to samo, liczbie najmniejszych, większych od $\frac{q}{2}$ reszt według mod. q szeregu wyrazów:

$$p,\ 2p,\ldots\ldots\frac{q-1}{2}\,p,$$

czyli krócej: liczbie reszt ujemnych w tymże szeregu. Oznaczając przez μ liczbę reszt ujemnych w szeregu reszt najmniejszych liczb q, $2q,\ \ldots\frac{p-1}{2}\,q$ według mod. p, mamy według prawa wzajemności:

$$\mu+\nu\equiv\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}\ (\text{mod. } 2)$$

tak, iż jeżeli okażemy, że:

$$\sum_{i=1}^{i=q-1}E\left(\frac{ip}{2q}\right)\equiv\mu\ (\text{mod. } 2),$$

uzyskamy w ten sposób najprostszy dowód prawa wzajemności.