MISCELLANEA MATEMATYCZNE.

1. Jedno twierdzenie o czworokącie i wnioski z niego.

Niech będzie $ABCD$ czworokąt dowolny wypukły, niezupełny, którego boki AB, BC, CD, DA oznaczmy odpowiednio przez a, b, c, d, a przekątne AC i BD, przecinające się pod kątem $BOC = \varphi < \frac{\pi}{2}$ w punkcie O, przez p_1 i p_2.

Z $\Delta\Delta$-ów AOB, BOC, COD, COA mamy:

$$a^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + 2 \,.\, AO \,.\, BO \,.\, \cos\varphi\,,$$

$$b^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 - 2BO \,.\, CO \,.\, \cos\varphi\,,$$

$$c^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 + 2 \,.\, CO \,.\, DO \,.\, \cos\varphi\,,$$

$$d^2 = DO^2 + AO^2 - 2DO \,.\, AO \cos\varphi\,.$$

Stąd, pomnożywszy równość drugą i czwartą przez -1 i dodawszy wszystkie, otrzymamy:

$$(1) \qquad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2AC \,.\, BD \cos\varphi = 4P \operatorname{cotg}\varphi.$$

P—pole danego czworokąta. Jeżeli $\varphi > \frac{\pi}{2}$, to $b^2 - a^2 + d^2 - c^2 > 0$; jeżeli $\varphi = \frac{\pi}{2}$, to $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Z równości (1) wypada: $a^2 - b^2 + c^2 + d^2 = 2p_1p_2\cos\varphi$, skąd, gdy czworokąt daje się opisać na kole, t. j. gdy $a + c = b + d$, dostajemy: $2p_1p_2\cos\varphi = (a+c)^2 - 2ac + (b+d)^2 - 2bd = 2(bd - ac)$ czyli:

$$(2) \qquad bd - ac = p_1 p_2 \cos\varphi\,.$$

Z tego widocznem jest, że dla takiego czworokąta w przypadku $\varphi = \frac{\pi}{2}$ istnieje równość:

$$ac = bd. \tag{3}$$

Wrazie, gdy $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ i $ac = bd$ albo $a + c = b + d$ i $ac = bd$, to czworokąt tym warunkom zadosyć czyniący musi być deltoidem, a w przypadku szczególnym—rombem.

Dla czworokąta $ABCD$ wpisanego w koło, gdzie np. $\angle DAB + \angle DCB = \pi$, opierając się tylko na tem, oznaczywszy kąty DAB i ABC odpowiednio przez α i β, możemy otrzymać prócz (1) jeszcze następujące równości:

$$4P \operatorname{cotg} \alpha = a^2 + d^2 - b^2 - c^2 \text{ i } 4P \operatorname{ctg} \beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2.$$

Dla tegoż czworokąta z (1) dostajemy: $(a+c)^2 - (b-d)^2 = 4p_1p_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ $(b+d)^2 - (a-c)^2 = 4p_1p^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$. Jeżeli czworokąt daje się jednocześnie wpisać i opisać na kole, to, uwzględniwszy (2), a także $ac + bd = p_1p_2$, mamy:

$$\left\{\begin{aligned} ac &= p_1 p_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \\ bd &= p_1 p_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Równości te przepisać można w ten sposób:

$$\left\{\begin{aligned} ac &= P \operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}, \\ bd &= P \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Stąd, pomnożywszy jednę równość przez drugą, otrzymujemy:

$$P^2 = abcd \quad \text{czyli} \quad P = \sqrt{abcd}. \tag{6}$$

Jeżeli jednocześnie $ac = bd$, to czworokąt jest deltoidem, przyczem, gdy $p_1 > p_2$, $\angle ABC = \angle CDA = \frac{\pi}{2}$.

2. O niektórych własnościach równania $ax+by=c$, gdzie a i b są liczby wzajemnie pierwsze, a przytem łącznie z c — całkowite i dodatnie.

Będziemy mówili o pierwiastkach całkowitych i dodatnich pomienionego równania, włączając w nie 0.

Twierdzenie 1. Gdy równanie $ax+by=c$, zadośćczyniące powyżej nadmienionym warunkom, wcale niema pierwiastków całkowitych i dodatnich, koniecznem jest, by $c<ab$.

Dow. Równanie przepisać można tak:

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Wiadomo, że śród liczb 0, 1, 2,......, $a-1$ istnieje zawsze jedna i tylko jedna taka, która nam daje jednę z wartości na y, zadośćczyniących równaniu powyższemu. Ponieważ równanie to nie może mieć pierwiastków całkowitych i dodatnich, więc jeżeli y przyjmuje wartość $a_k<a$, ale >0, to $c-ba_k<0$, a więc tembardziej $c-ab<0$, czyli:

$$c<ab. \quad \text{c. b. d. o.}$$

Twierdzenie 2. Jeżeli w równaniu powyższem: $ax+by=c$ wyraz wolny $c=nab$, gdzie n jest liczbą całkowitą i dodatnią, to dane równanie posiada $n+1$ pierwiastków całkowitych i dodatnich.

Dow. Z równania $ax+by=nab$ wypada:

$$x=\frac{nab-by}{a}.$$

Łatwo widzieć, że, dając na y wszystkie wartości liczebne z szeregu 0, a, $2a$,...., na, dostaniemy na x też wartości całkowite i dodatnie. Tych wartości na x i y jest $n+1$. Więcej ich być nie może. Rzeczywiście niech $y=ka+m$, gdzie $m<a$, k jedna z liczb szeregu 0, 1, y,..., n (mowa o pierwiastkach dodatnich). Wtedy $x=\frac{(n-k)ab-bm}{a}$

lecz licznik tego ułamku przez a dzielić się nie może, gdyż b i m są liczby pierwsze względem a, $(n-k)ab$ przez a się dzieli. Tym sposobem równanie ma zawsze $n+1$ pierwiastków i tylko $n+1$.

Twierdzenie 3. Jeżeli w równaniu powyższem c zadośćczyni nierównościom: $(n-1)ab \leqq c < nab$, to równanie ma albo n, albo $n-1$ pierwiastków całkowitych i dodatnich.

Dow. Ponieważ, jak to wypada z twierdzenia (1), równanie ma przynajmniej jeden pierwiastek całkowity i dadatni, np. x_0 i y_0, to wszystkie inne pierwiastki tego równania, jak wiadomo, dostać możemy ze wzorów: $x = x_0 \pm bt$, $y = y_0 \mp at$. Z drugiej strony z danego warunku na c mamy:

$$n-1 \leqq \frac{c}{ab} < n, \quad \text{czyli} \quad n-1 \leqq \frac{ax_0+by_0}{ab} < n,$$

albo:

(1)
$$n-1 \leqq \frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a} < n.$$

Jezeli x i y mają być liczbami całkowitemi i dodatniemi, to $x_0 \pm bt > 0$ i $y_0 \mp at > 0$. Wybierając jedną parę odpowiadających sobie znaków (to samo można powtórzyć, uwzględniwszy drugą), dostajemy $t > -\frac{x_0}{b} < 0$ i $t < \frac{y_0}{a} > 0$. Prócz pary pierwiastków x_0 i y_0 równanie może mieć jeszcze tyle par pierwiastków całkowitych i dodatnich ile razy t może przyjmować wartość liczebną całkowitą pomiędzy granicami: $-\frac{x_0}{b}$ i $\frac{y_0}{a}$, lecz, jak wskazuje warunek (1) takich wartości, nie uwzględniając 0, może być albo $n-1$, albo $n-2$. To pierwsze będzie wtedy, gdy:

$$E\left(\frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a}\right) = E\left(\frac{x_0}{b}\right) + E\left(\frac{y_0}{a}\right),$$

drugie, gdy

$$E\left(\frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a}\right) > E\left(\frac{x_0}{b}\right) + E\left(\frac{y_0}{a}\right),$$

czyli:

$$E\left(\frac{x_0}{b} + \frac{y_0}{a}\right) = E\left(\frac{x_0}{b}\right) + E\left(\frac{y_0}{a}\right) + 1.$$

Stąd wypada, że pierwiastków równanie może mieć albo n, albo $n-1$, co b. d. o.

Wszystkie powyższe własności równania $ax+by=c$ można zilustrować graficznie w ten sposób, że na osiach odciętych i rzędnych w kierunku dodatnim od początku układu odetniemy szereg odcinków odpowiednio równych 1, 2, 3 i t. d. jednostkom przyjętym długości. Przez punkty podziału poprowadzimy proste równoległe do osi, przez co utworzy się sieć, w której każdy punkt przecięcia powyższych prostych będzie miał spółrzędne całkowite i dodatnie w kącie pierwszym, o który głównie nam chodzi. Równanie $ax+by=c$ przedstawia w tym razie prostą, przecinającą osi w kącie pierwszym tak, że odcinki na osiach są odpowiednio równe $\frac{c}{a}$ i $\frac{c}{b}$.

Nie będziemy tutaj bliżej wchodzili w szczegóły, nadmienimy tylko, że wszystkie proste, przechodzące przez początek układu i przez odpowiednie wyżej wzmiankowane punkty sieci, są nachylone do osi X pod kątami, których styczne przyjmują wszelkie wartości wymierne liczebne, zawarte pomiędzy 0 i ∞, które dają się ułożyć w tabliczkę tego rodzaju, że z niej odrazu można widzieć przy pomocy ilustracyi geometrycznej, że mnogość tych liczb jest odliczalna, jak mówi Cantor (abzählbare Menge).

L. Z.