W. SMOSARSKI.

PRACE M. MARGULESA
o wahaniach peryodycznych ciśnienia barometrycznego.

REFERAT.

WSTĘP.

Streszczenie niniejsze obejmuje następujące rozprawy M. Margulesa:

„Ueber die Schwingungen periodisch erwärmter Luft", str. 24, Wiedeń 1890.

„Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale bei zonaler Druckverteilung", str. 30. Wiedeń, 1892.

„Luftbewegungen in einer rotirenden Sphäroidschale", część II, str. 46, część III, str. 53, Wiedeń, 1893.

(Odbitki z „Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien").

Klasyczne te prace z Meteorologii teoretycznej, z powodu nadzwyczajnej zwięzłości przedstawienia oraz zawiłości rachunku, dopiero w jakiś dziesiątek lat po ukazaniu się zwróciły należytą uwagę uczonych. Nie podobna osiągnąć zupełnego ich zrozumienia, nie przerobiwszy całej pracy z ołówkiem w ręku, powiada prof. W. Trabert[1].

---

[1]) W. Trabert. „Theorie der täglichen Luftdruckschwankung von Margules und die tägliche Oscillation der Luftmassen." Meteorologische Zeitschrift, 1903.

Teorya Marguleśa ma na celu wyjaśnienie zależności zmian dziennych ciśnienia od temperatury.

Jeżeli nakreślimy przebieg dzienny ciśnienia barometrycznego dla jakiegokolwiek miejsca po wyrugowaniu wpływów nieperyodycznych, biorąc czas za odciętą, a odchylenie ciśnienia od średniej wartości za rzędną, to otrzymamy nieregularną linię falową; daje się ona rozłożyć na szereg drgań prostych:

$$c_1 \sin(\nu t+\delta_1)+c_2 \sin(2\nu t+\delta_2)+c_3 \sin(3\nu t+\delta_3)+\ldots\ldots, \left[\frac{2\pi}{\nu}=1 \text{ dniowi}\right]$$

o okresach 24, 12, 8, 6 i t. d. godzin; z nich tylko pierwsze i drugie mają amplitudy znaczne, około $\frac{1}{760}$ ciśnienia średniego, podczas gdy pozostałe są niewielkie i mogą być pominięte. W ten sposób przebieg dzienny ciśnienia można przedstawić dosyć dokładnie, jako sumę dwu fal — całodziennej i półdziennej, przyczem ta druga zazwyczaj przeważa. Podobnież można rozłożyć przebieg dzienny temperatury na fale proste: całodzienną, półdzienną i t. d.

Całodzienna fala ciśnienia jest niewątpliwie wywołana przez całodzienną falę temperatury. Występuje ona daleko silniej w dni jasne niż pochmurne, jest bardzo nieznaczna na morzu i okazuje na lądzie wielkie różnice zależnie od miejscowości. Hann wykazał empirycznie, że wszystkie te właściwości dają się objaśnić wpływem całodziennej fali temperatury.

Półdzienna fala ciśnienia odznacza się stosunkowo dużą amplitudą względnie do odpowiadającej jej półdziennej fali temperatury i niezwykłą w Meteorologii regularnością: jest ona prawie jednakowych rozmiarów we wszystkich miejscowościach, leżących na jednakowej szerokości geograficznej i jest jednakowej fazy względem czasu miejscowego. Jej związek z półdzienną falą temperatury nie jest dotychczas wyjaśniony.

Wszelka ograniczona masa powietrza (np. w rurze organowej) ma właściwe sobie drgania swobodne. I atmosfera jest taką skończoną, ograniczoną masą powietrza, „nastrojoną“ na zupełnie określone drgania swobodne, których okresy znajdują się w pewnym stosunku do siebie i zależą tylko od własności atmosfery,

jej temperatury, a przedewszystkiem od jej rozmiarów. Na tych to drganiach swobodnych opiera się teorya Margulesa półdziennego wahania barometru.

Każda fala sinusoidalna temperatury o jakimkolwiek okresie, jak się przekonamy dalej, wywołuje w atmosferze falę wymuszoną ciśnienia, mającą taki sam okres. Ale amplituda fali wymuszone zależy nietylko od amplitudy wywołującego ją czynnika, lecz i od własności układu drgającego i jest tem większa, im bardziej okres czynnika działającego zbliżą się do okresu swobodnego drgania układu. Otóż Margules wykazał, iż w atmosferze istnieje drganie swobodne z dwiema największościami i dwiema najmniejszościami wzdłuż każdego z równoleżników, którego okres jest bardzo blizki 12 godzin, ale niema żadnego drgania swobodnego o okresie blizkim 24 godzin; to jest przyczyną wielkiej amplitudy półdziennej fali wymuszonej ciśnienia, wywołanej przez słabą stosunkowo półdzienną falę temperatury. Co do wielkości amplitudy, teorya Margulesa w granicach, przyjętych przez niego założeń, wyjaśnia dobrze wahanie półdzienne barometru; pozostaje niewytłómaczoną jego regularność.

Prace Margulesa można podzielić na dwie części: o drganiach swobodnych atmosfery i o wpływie wahań peryodycznych temperatury.

Jakie mogą być drgania swobodne atmosfery?

Wyobraźmy sobie naprzód kulę nieruchomą, otoczoną atmosferą wolną od tarcia, wytwórzmy w jakikolwiek sposób różnice ciśnienia od jednego pasa równoleżnikowego do drugiego i pozostawmy powietrze samemu sobie; wówczas nastąpi ruch wzdłuż południków w kierunku spadku ciśnienia; ten ruch będzie trwał w dalszym ciągu, pomimo że różnice ciśnienia się wyrównają, a to skutkiem bezwładności, i wytworzy spadek ciśnienia w kierunku przeciwnym. W ten sposób ruch przechodzi na drgania stojące. Odchylenie ciśnienia od wartości średniej zmienia się podług prawa następującego:

$$\varepsilon = E(\varphi) \sin nt,$$

gdzie $E(\varphi)$ oznacza pewną funkcyę szerokości geograficznej danego punktu, t czas, a $\frac{2\pi}{n}$ jest okresem drgania.

Jeżeli nasza kula wiruje, to przy tych samych warunkach powstaną również fale stojące ciśnienia:

$$\varepsilon = E(\varphi) \sin nt,$$

z tą tylko różnicą, że prócz ruchów południkowych powietrza towarzyszyć im będą ruchy względne wzdłuż równoleżników. Oprócz fal stojących możliwe są jeszcze ruchy stateczne powietrza wzdłuż równoleżników dla ciśnienia stałego w czasie, choć różnego, zależnie od szerokości.

W przypadku ogólnym, gdy warunki początkowe są funkcyami nietylko szerokości (φ), lecz i długości geograficznej (λ), równania aerodynamiczne dają jako rozwiązanie następującą funkcyę peryodyczną dwu zmiennych:

$$\varepsilon = E(\varphi) \sin (h\lambda + nt); \qquad h = 1, 2, 3, \ldots$$

Jeżeli n jest dodatnie, to wzór ten oznacza falę ciśnienia, postępującą na zachód, jeżeli n jest ujemne, to otrzymamy falę ciśnienia, postępującą na wschód.

Gdyby ziemia była nieruchoma, to te fale byłyby zupełnie identyczne i tylko wprost przeciwne co do kierunku rozchodzenia się. W rezultacie więc dałyby znów falę stojącą. Prócz fal stojących możliwe jest, że ciśnienie pozostaje bez zmiany ($\varepsilon = 0$) i powietrze obraca się statecznie wzdłuż równoleżników. Zobaczmy teraz, jak się przedstawiają te ruchy na ziemi wirującej. Przedewszystkiem, obrót ziemi będzie przyśpieszał falę postępującą na zachód i opóźniał falę postępującą na wschód. Okresy ich nie są już jednakowe, i one nie łączą się w jedno drganie stojące. Podobnież ruchy stateczne na ziemi wirującej nie są możliwe i przechodzą na fale, rozchodzące się na zachód, 2-go rodzaju. Tak więc na kuli nieruchomej mielibyśmy fale stojące i ruchy stateczne, na kuli zaś wzrastającej tylko fale postępowe trzech rodzajów. Liczba tych fal jest nieskończenie wielka, Margules dzieli je na klasy stosownie do $h = 1, 2, 3$ i t. d. Gdy $h = 0$, będzie to klasa strefowa, o której mówiliśmy na po-

czątku. Fale klasy pierwszej ($h=1$) mają wzdłuż równoleżnika jeden grzbiet i jednę dolinę, fale klasy drugiej ($h=2$) mają w keżdej chwili dwa grzbiety i dwie doliny wzdłuż równoleżnika i t. d.

W każdej klasie istnieje nieskończenie wiele typów fal, stosownie do wartości n. Oczywista, iż drgania atmosfery nie są tak proste, jak przedstawiliśmy, lecz jakkolwiek byłyby złożone, zawsze dają się rozłożyć na sumę (w ogólności nieskończoną) takich drgań prostych.

Przypuszczaliśmy wyżej, że powietrze jest wolne od tarcia, co się nie zgadza z rzeczywistością. Nie znamy jednak należycie praw tarcia w atmosferze, tak że może być mowa tylko o tem, jak ono w ogóle wpływa na wyniki poprzedzające. Otóż, po pierwsze, tarcie zmniejsza stopniowo amplitudę drgania swobodnego lub nawet przekształca je na prosty ruch zanikający, po drugie, zwiększa okres drgania. Prócz tego posiada jeszcze trzecią charakterystyczną właściwość. W Meteorologii rozpatruję się tylko ruchy w kierunku spadku ciśnienia, stosujące się do znanej reguły Buys-Ballota: jeżeli zwrócimy się plecami do wiatru, to na półkuli północnej będziemy mieli dziedzinę ciśnienia nizkiego po lewej ręce (na półkuli południowej po prawej). Tymczasem z góry można spodziewać się w atmosferze ruchów w kierunku przeciwnym gradientowi, gdyż nie można przypuszczać, żeby ruch powstały w pewnym kierunku ustawał natychmiast po wyrównaniu różnicy ciśnień: trwa on dalej wskutek bezwładności i wytwarza wyższe ciśnienie tam, gdzie przedtem było niższe. Wymienione przez nas wyżej rodzaje fal swobodnych bardzo różnią się w stosunku do reguły Buys-Ballota. Fale postępowe wschodnie i zachodnie 2-go rodzaju stosują się prawie zupełnie do reguły, a w falach zachodnich 1-go rodzaju ruch jest przeważnie jej przeciwny. Otóż rachunek wykazuje, iż te drgania, w których zachodzą ruchy, niezgodne z regułą Buys-Ballota, zanikają pod wpływem tarcia daleko szybciej niż te, które są z nią zgodne. Stąd, że w naszej atmosferze prawie się nie spotyka ruchów przeciwnych wspomnianej regule, wynika, że tarcie w atmosferze musi być znaczne.

Poniższa tabelka zawiera okresy niektórych typów drgań swobodnych atmosfery wirującej bez tarcia w temperaturze 0°C— w godzinach:

	Klasa pierwsza.	Klasa druga.
Fala postępująca na zachód	13·9	11·9
Fala postępująca na wschód	36·6	18·4
Fala postępująca na zachód 2-go rodzaju	130·7	93·7

Całodziennej fali temperatury odpowiadają fale swobodne, postępujące na zachód klasy 1-ej (z jedną górą i jedną doliną na każdym równoleżniku). Najbardziej zbliżonym okresem ich do 24 godzin jest 13·9 (przez tarcie okres ten powiększa się nieco). Ale jeżelibyśmy jeszcze porównali rozkład izobar w rzeczywistej całodziennej fali ciśnienia i w zaznaczonej fali swobodnej, to przekonalibyśmy się, że ta ostatnia jest odmiennego charakteru i że za najbardziej zbliżoną do całodziennej należy uważać falę swobodną zachodnią 2-go rodzaju o okresie 130·7 godzin. Natomiast pośród fal klasy 2-ej znajdujemy falę w okresie 11·9 godzin, bardzo blizkim do półdziennej fali temperatury i co do charakteru podobną do półdziennej fali ciśnienia.

Przejdźmy teraz do wahań ciśnienia, wywołanych przez zmiany peryodyczne temperatury. Wyobraźmy sobie naprzód rurę nieskończoną, wypełnioną powietrzem, wzdłuż której postępuje fala sinusoidalna temperatury (τ) w kierunku x:

$$\tau = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} + \frac{x}{L}\right),$$

gdzie θ oznacza okres drgania fali temperatury, L długość tej fali, a $\frac{L}{\theta} = V$ jest prędkością jej rozchodzenia się. Fala ta wywołuje, bez tarcia, falę ciśnienia:

$$\varepsilon = A \frac{V^2}{V^2 - c^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\theta} + \frac{x}{L}\right),$$

gdzie c oznacza prędkość rozchodzenia się w powietrzu drgania izotermicznego (Newtona). Widzimy z tego wzoru, iż okres,

długość i prędkość rozchodzenia się wymuszonej fali ciśnienia są takie same, jak temperatury. Amplituda zaś $A\frac{V^2}{V^2-c^2}$, zależy od amplitudy wahań temperatury, oraz od prędkości rozchodzenia się $V=L/\theta$ i jest tem większa, im bardziej ta ostatnia zbliża się do prędkości drgań izotermicznych, a więc swobodnych. Przykład ten wyjaśnia to, co powiedzieliśmy wyżej o zależności amplitudy drgań wymuszonych od częstości drgań swobodnych. Widzimy dalej z naszego wzoru, iż faza wymuszonej fali ciśnienia w zupełności zgadza się z fazą temperatury, t. j. maximum ciśnienia przypada wraz z maximum temperatury, jeżeli prędkość rozchodzenia się jest większa niż prędkość c, i jest wprost przeciwna w przypadku odwrotnym. I ta własność fali wymuszonej nie jest przypadkowa, lecz, jak zobaczymy dalej, jest prawem ogólnem. Gdy $V=c$, amplituda fali wymuszonej ciśnienia staje się nieskończenie wielką. Jeżeli wprowadzimy w rachunek tarcie o spółczynniku l, to fala ciśnienia będzie miała postać:

$$\varepsilon = KA \sin\left(\frac{t}{\theta}+\frac{x}{L}+\eta\right); \quad K=\frac{V\sqrt{V^2+l^2L^2}}{\sqrt{(V^2-c^2)^2+V^2l^2L^2}}.$$

Widzimy stąd, iż tarcie przesuwa fazę ciśnienia względem temperatury o wielkość η, będącą pewną funkcyą tarcia. Następnie amplituda też zależy od tarcia i jest tem większa, im bardziej prędkość rozchodzenia się V zbliża się do c, lecz nigdy nie może wzrosnąć do nieskończoności.

Po tym przykładzie, mającym ułatwić zrozumienie dalszych wyników, przejdziemy do przypadku, bardziej odpowiadającego rzeczywistości. W atmosferze o nieznacznej grubości, bez tarcia, otaczającej kulę wirującą o rozmiarach ziemi, fala temperatury, postępująca na zachód:

$$\tau = C \sin\omega \sin(\nu t+\lambda)$$

gdzie ω oznacza odległość kątową od bieguna, a λ szerokość geograficzną, $\frac{2\pi}{\nu}=24$ godzin, wytwarza falę ciśnienia przy przyjęciu temperatury średniej 0°C:

$$\varepsilon = C \sin(\nu t + \lambda)$$
$$[1{,}146 \sin\omega - 0{,}423 \sin^3\omega - 0{,}370 \sin^5\omega - 0{,}106 \sin^7\omega - \ldots\ldots].$$

Jeżeli zaś fala temperatury powtarza się dwa razy dziennie, to przyjmując:

$$\tau = C \sin^2\omega \sin(2\nu t + 2\lambda),$$

gdzie tylko dla uproszczenia rachunku podano inne prawo zależności temperatury od szerokości geograficznej, będzie:

$$\varepsilon = -C \sin(2\nu t + 2\lambda)$$
$$[37{,}99 \sin^4\omega + 23{,}06 \sin^6\omega + 5{,}75 \sin^8\omega + 0{,}81 \sin^{10}\omega + \ldots\ldots].$$

Wobec poczynionych założeń powyższe wyrażenia na ε nie mogą mieć bezwzględnego znaczenia dla ziemi. Są one jednak bardzo charakterystyczne pod tym względem, iż dla równych wahań temperatury, wahania ciśnienia w fali półdziennej wypadają daleko większe, niż w fali pojedyńczej. Obliczając takie fale dla różnych temperatur średnich, Margules przekonał się, że spółczynniki pierwszego szeregu wstaw zmieniają się bardzo wolno z temperaturą. Inaczej dla fali półdziennej: tu mnożnik przy $\sin^4\omega$, w pobliżu temperatury -5^0C, przeskakuje od $-\infty$ do $+\infty$, zupełnie jak w przykładzie poprzedzającym fali w rurze nieskończonej, gdy prędkość jej rozchodzenia staje się równą prędkości drgań swobodnych (izotermicznych). Jeżeli przeto przyjąć temperaturę średnią atmosfery kulistej blizką -5^0C, to wystarczają małe półdzienne fale temperatury o amplitudzie zaledwie dostrzegalnej, aby wytworzyć w powietrzu bez tarcia wielkie fale ciśnienia. Ciekawy ten wynik zgadza się z tem, co powiedzieliśmy wyżej o istnieniu w atmosferze fali swobodnej podwójnej o okresie bardzo blizkim 12 godzin i o wpływie, jaki ona powinna wywierać na półdzienną falę wymuszoną ciśnienia.

Jak w przykładzie rury nieskończonej, tak i tu tarcie zmienia amplitudę fali wymuszonej, ale w różnym stopniu, zależnie od szerokości geograficznej, oraz przesuwa fazę. Niżej przytaczamy 2 tabelki, uwidoczniające wpływ tarcia na falę ciśnienia. Amplituda temperatury przyjęta jest równą 1^0C na równiku; spółczynnik

tarcia l, dla dogodności rachunku, przyjęto równym 0·262 godziny t. j. prędkości kątowej obrotu ziemi.

Fala całodzienna.

$$\tau = {}^1/_{273} \sin\omega \sin(\nu t + \lambda)\,; \quad 2\pi/_\nu = 24 \text{ godzin.}$$

Szerokość geograf.	273 τ	$10^3\,\varepsilon$ Fala wymuszona bez tarcia	$10^3\,\varepsilon$ Fala wymuszona z tarciem
90°	0	0	0
75°	0,26 sin ($\nu t + \lambda$)	1,06 sin ($\nu t + \lambda$)	1,04 sin ($\nu t + \lambda +$ 9°,0)
60°	0,50 „ „	1,86 „ „	1,92 sin ($\nu t + \lambda +$ 12°,2)
45°	0,71 „ „	2,15 „ „	2,48 sin ($\nu t + \lambda +$ 17°,6)
30°	0,87 „ „	1,84 „ „	2,72 sin ($\nu t + \lambda +$ 24°,3)
15°	0,97 „ „	1,22 „ „	2,72 sin ($\nu t + \lambda +$ 30°,5)
0°	1,00 „ „	0,91 „ „	2,69 sin ($\nu t + \lambda +$ 33°,3)

Skutkiem tarcia, amplitudy przeważnie powiększyły się; maximum ciśnienia wyprzedza maximum temperatury, zależnie od szerokości geograficznej; wyprzedzenie to jest największe na równiku, gdzie wynosi 2,2 godziny.

Fala półdzienna.

$$\tau = {}^1/_{273} \sin^2\omega \sin(2\nu t + 2\lambda)\,; \quad \frac{2\pi}{2\nu} = 12 \text{ godzin.}$$

Szerokość geograf.	273 τ	$10^3\,\varepsilon$ Fala wymuszona bez tarcia	$10^3\,\varepsilon$ Fala wymuszona z tarciem
90°	0	0	0
75°	0,07 sin ($2\nu t + 2\lambda$)	– 0,6 sin ($2\nu t + 2\lambda$)	0,25 sin ($2\nu t + 2\lambda +$ 11°,9)
60°	0,25 „ „	– 10,1 „ „	0,98 sin ($2\nu t + 2\lambda +$ 18°,2)
45°	0,50 „ „	– 46,6 „ „	2,15 sin ($2\nu t + 2\lambda +$ 28°,3)
30°	0,75 „ „	– 120,9 „ „	3,66 sin ($2\nu t + 2\lambda +$ 38°,3)
15°	0,93 „ „	– 207,2 „ „	5,06 sin ($2\nu t + 2\lambda +$ 45°,7)
0°	1,00 „ „	– 247,1 „ „	5,66 sin ($2\nu t + 2\lambda +$ 48°,7)

Widzimy, iż w fali półdziennej wskutek tarcia, amplitudy ciśnień są już znacznie mniejsze, niż w układzie, wolnym od tarcia; tak na równiku amplituda jest tylko dwa razy większa niż amplituda analogicznej fali całodziennej. W atmosferze wolnej od tarcia faza ciśnienia jest przeciwna względem fazy temperatury. Tarcie przesuwa znacznie fazę ciśnienia, tak że w danym przykładzie na równiku maximum ciśnienia opóźnia się względem minimum temperatury o 4,4 godziny. Przesunięcie to jest bardzo rozmaite w różnych szerokościach. Należy zaznaczyć, że ten ostatni wynik rachunku nie zgadza się z rzeczywistością: półdzienna bowiem fala ciśnienia posiada w naturze prawie jednakową fazę we wszystkich szerokościach.

Widzieliśmy, iż według teoryi, w fali całodziennej maximum ciśnienia przypada jednocześnie z maximum temperatury; tymczasem w przyrodzie maximum ciśnienia przypada w tym czasie, co i minimum temperatury. Sprzeczność ta wynika stąd, że założenie fali temperatury, biegnącej dokoła ziemi z amplitudą stałą, zanadto odbiega od rzeczywistości. Wistocie, wskutek wielkich różnic lokalnych, ogrzewanie dzienne rozchodzi się z amplitudą prawie stałą codziennie tylko na oddzielnych, względnie małych obszarach; w każdym takim obszarze ma ona niemal charakter fali stojącej. Takie drgania stojące temperatury, zachodzące tylko w małym obszarze atmosfery, powodują w nim wahania ciśnienia, których maximum następuje jednocześnie z minimum temperatury. Podobnież rzecz się będzie miała przy falach postępowych temperatury, jeżeli one rozchodzą się tylko na niewielkie odległości. Jeszcze dwa szczególne wypadki uzupełniają rozprawy Margulesa; mianowicie, gdy wahania ciśnienia zachodzą w dolinie zamkniętej (w słupie pionowym powietrza), oraz gdy w pewnej warstwie atmosfery przechodzi fala temperatury, pod tą zaś warstwą i nad nią temperatura pozostaje bez zmiany. Ten ostatni rachunek (tylko dla atmosfery płaskiej) wykonał Margules ze względu na hypotezę Hanna, że przyczyna półdziennej fali ciśnienia tkwi w pochłanianiu promieni słonecznych przez górne warstwy atmosfery.

„Gdyby można było—powiada autor w końcu swej pracy — podać przyczynę prawidłowej fali półdziennej, to wykonane ra-

chunki, wystarczyłyby do dość zupełnego rozwiązania zagadnienia o dziennem wahaniu barometru."

Z wymienionych w nagłówku rozpraw Margulesa pierwsza „O drganiach powietrza peryodycznie ogrzewanego" traktuje o wahaniach ciśnienia, wywołanych w przypadku atmosfery bez tarcia; I i II części drugiej rozprawy „Ruchy powietrza w warstwie sferoidalnej" poświęcone są zbadaniu ruchów swobodnych atmosfery; doświadczenie, nabyte przy rozwiązaniu tych ostatnich zagadnień, dało możność autorowi przezwyciężyć wielkie trudności rachunkowe, związane z badaniem fal ciśnienia, wymuszonych w atmosferze przez zmiany temperatury, z uwzględnieniem tarcia, co stanowi przedmiot trzeciej części drugiej rozprawy. Teoryę ogólną uzupełnił Margules obliczeniem wielu typów fal ciśnienia, zarówno swobodnych. jak i wymuszonych, oraz zbadaniem ich stosunków wzajemnych.

Znaczenie drgań swobodnych atmosfery dla wyjaśnienia fali półdziennej ciśnienia pierwszy wskazał W. Thomson w r. 1882, jednak bez przeprowadzenia idei tej w rachunku. Odnośne równania aerodynamiczne przedstawiają analogię do równań różniczkowych z teoryi przypływów i odpływów morskich Laplace'a i zostały rozwiązane przez Margulesa, dzięki zastosowaniu obmyślonej przez Laplace'a metody ułamków łańcuchowych. Wyjaśnienie tej metody i wskazanie jej znaczenia dla równań aerodynamicznych jest również zasługą W. Thomsona.

Streszczenie niniejsze podzieliliśmy na cztery części. Część pierwsza obejmuje równania ogólne ruchu powietrza na płaszczyźnie i na kuli. Część druga — drgania swobodne (w temperaturze stałej) atmosfery przy rozkładzie strefowym ciśnień. Część trzecia — drgania swobodne atmosfery w przypadku ogólnym dla jakiegokolwiek rozkładu ciśnień początkowych. Wreszcie, część czwarta—ruchy powietrza w atmosferze pod wpływem zmian peryodycznych temperatury. W każdej z trzech ostatnich części rozpatruje się naprzód warstwę kulistą powietrza, bez tarcia, nieruchomą; potem takąż warstwę wirującą, a następnie obadwa te przypadki z uwzględnieniem tarcia.

ROZDZIAŁ I.

Równania ogólne.

§ 1. Ruch powietrza na płaszczyźnie.

Wyobraźmy sobie ziemię, jako płaszczyznę nieskończoną na której powietrze porusza się bez tarcia, jednakowo we wszystkich płaszczyznach pionowych równoległych, w kierunku ze wschodu na zachód. Wprowadzimy następujące oznaczenia, u—składowa pozioma prędkości (wzdłuż osi x), w – składowa pionowa prędkości (wzdłuż osi z, do góry), μ—gęstość powietrza- p—ciśnienie, T—temperatura bezwzględna, t—czas, g—przyśpieszenie ciężkości, R– stała.

Dla małych prędkości, dla których można pominąć wyrazy 2-go stopnia wielkości u i w, będziemy mieli następujące równania ruchu:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - g;$$

dalej równanie ciągłości, dające zależność pomiędzy zmianą gęstości i prędkości:

$$(1a) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0.$$

wreszcie prawo Mariotte'a-Gay-Lussac'a:

$$(1b) \qquad p = R\mu T.$$

Jeżeli powietrze jest w spoczynku, to p, μ i T mają wartości p_0, μ_0, T_0, będące funkcyami samej tylko wysokości z, przyczem z poprzedzających równań otrzymamy:

$$(2) \qquad \frac{1}{p_0}\cdot\frac{\partial p_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0}; \quad \frac{1}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0} - \frac{1}{T_0}\cdot\frac{dT_0}{dz};$$

$$p_0 = R\mu_0 T.$$

Niech ruch powstaje przez małe zmiany temperatury, wówczas wahania gęstości i ciśnienia będą wogóle nieznaczne; jeżeli napiszemy:

$$p = p_0(1+\varepsilon), \quad \mu = \mu_0(1+\sigma), \quad T = T_0(1+\tau),$$

wówczas ε, σ i τ będą liczbami małemi, których kwadraty i iloczyny pomijamy:

$$(3)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + g\tau; \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - w\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}\right) = 0; \quad \varepsilon = \sigma + \tau. \end{aligned}$$

Rugując z powyższych równań u, w i σ, otrzymamy następującą zależność pomiędzy ciśnieniem i temperaturą:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \\ &= \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{g}{RT_0}\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{\partial z}\right)\tau - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

§ 2. Ruch powietrza na kuli.

Oznaczamy przez: r—promień, ω—odległość kątową od bieguna, λ—długość wschodnią.

$$x = r\sin\omega\cos\lambda, \quad y = r\sin\omega\sin\lambda, \quad z = r\cos\omega.$$

Posiłkując się znanemi nam wzorami, składowe siły w spółrzędnych biegunowych, znajdziemy:

$$(5)\quad \begin{cases} P = \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2, \\ \Omega = r\dfrac{d^2\omega}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\,.\sin\omega\left(\dfrac{d\lambda}{dt}\right)^2, \\ \Lambda = r\sin\omega\dfrac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\sin\omega\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\lambda}{dt} + 2r\cos\omega\dfrac{d\omega}{dt}\cdot\dfrac{d\lambda}{dt}. \end{cases}$$

gdzie P, Ω, Λ są składowemi siły w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach — promienia, południka i równoleżnika. Oznaczając składowe prędkości w tych kierunkach:

$$\frac{dr}{dt} = a \qquad r\frac{d\omega}{dt} = b, \qquad r\sin\omega . \frac{d\lambda}{dt} = c$$

i odrzucając kwadraty i iloczyny tych składowych, znajdziemy:

$$P = \frac{da}{dt}, \qquad \Omega = \frac{db}{dt}, \qquad \Lambda = \frac{dc}{dt}.$$

Szukane równania ruchu powietrza na kuli będą:

$$(6) \quad -g - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial a}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu r}\cdot\frac{\partial p}{\partial \omega} = \frac{\partial b}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu r\sin\omega}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Równania (6) służą dla kuli nieruchomej. Aby otrzymać równania ruchu względnego na kuli wirującej, należy podstawić w równaniach (5) $\nu t + \lambda$ zamiast λ oraz $\nu + \frac{d\lambda}{dt}$ zamiast $\frac{d\lambda}{dt}$; ν jest prędkością kątową obrotu ziemi.

Równanie ciągłości zarówno dla kuli nieruchomej, jak i wirującej będzie:

$$(7) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu r^2 a)}{r^2 \partial r} + \frac{\partial(\mu b\sin\omega)}{r\sin\omega\,\partial\omega} + \frac{\partial(\mu c)}{r\sin\omega . \partial\lambda} = 0.$$

Kładąc $p = p_0(1+\varepsilon)$, $\mu = \mu_0(1+\sigma)$, $T = T_0(1+\tau)$ otrzymamy z równań (6) i (7) dla małych τ i ε, po wyrugowaniu $\sigma = \varepsilon - \tau$, dla kuli wirującej:

$$(8) \quad \begin{cases} g\tau - RT_0\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial r} = \dfrac{\partial a}{\partial t} - 2\nu\sin\omega . c \\[2ex] -RT_0\dfrac{\partial\varepsilon}{r\partial\omega} = \dfrac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega . c \\[2ex] -RT_0\dfrac{\partial\varepsilon}{r\sin\omega . \partial\lambda} = \dfrac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\sin\omega . a + 2\nu\cos\omega . b \\[2ex] \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \dfrac{\partial\tau}{\partial t} + \left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{g}{RT_0}\right)a + \dfrac{\partial a}{\partial r} + \dfrac{\partial(b\sin\omega)}{r\sin\omega . \partial\omega} + \dfrac{\partial c}{r\sin\omega . \partial\lambda} = 0. \end{cases}$$

Kładąc w ostatnich równaniach $v=0$, otrzymamy układ równań dla kuli nieruchomej.

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali jedynie bardzo cienką warstwę powietrza w porównaniu z promieniem ziemi i uwzględnimy tylko ruchy poziome powietrza, tak że r=stałej=S i $a=0$, skutkiem czego pierwsze z równań (8) staje się zbytecznem.

ROZDZIAŁ II.

Drgania swobodne atmosfery przy rozkładzie strefowym ciśnień.

---

§ 3. Fale stojące w warstwie kulistej nieruchomej bez tarcia.

Przyjmujemy powierzchnię ziemi za zupełnie jednostajną i pokrytą cienką warstwą powietrza o jednostajnej i stałej temperaturze. Niechaj w pewnym momencie ciśnienie i prędkość powietrza wykazują różnice tylko zależnie od szerokości, pozostające jednakowemi wzdłuż każdego z równoleżników. Szukamy więc ciśnienia i prędkości dla jakiegokolwiek momentu czasu, zakładając, że dla oznaczonego momentu czasu są one dane, jako funkcye samej tylko szerokości geograficznej.

Dla kuli nieruchomej podlegają rozpatrzeniu tylko prędkości południkowe, ponieważ prędkości wzdłuż równoleżników nie mogłyby zmienić rozkładu ciśnień. Przy założeniach powyższych: $\tau=0$, $c=0$, $a=0$, $r=S=$stała, równania ogólne, § 2 wzory (8), redukują się do następujących dwóch:

$$(1)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}=\dfrac{\partial b}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{1}{S\sin\omega}\cdot\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega}=0. \end{cases}$$

Można im uczynić zadość, kładąc:

$$b = \varphi(\omega).\cos nt, \quad \varepsilon = E(\omega)\sin nt.$$

Z pierwszego z równań (1) wynika: $\varphi = \frac{RT}{nS}.\frac{dE}{d\omega}$.
Rugując φ, znajdziemy następujące równanie na E:

$$(2) \qquad \frac{1}{\sin\omega}.\frac{d}{d\omega}\left(\frac{dE}{d\omega}.\sin\omega\right) + \frac{n^2S^2}{RT}E = 0,$$

t. j. równanie różniczkowe funkcyj kulistych, którego rozwiązania szczególne są:

$E_0 = 1$ oraz $n_0 = 0$,

$E_1 = \cos\omega$ oraz $n_1 S = \sqrt{1.2RT}$,

$E_2 = \frac{3}{2}(\cos^2\omega - {}^1/_3)$, oraz $n_2 S = \sqrt{2.3RT}$,

$E_3 = \frac{5}{2}(\cos^3\omega - {}^3/_5\cos\omega)$ oraz $n_3 S = \sqrt{3.4RT}$.

i t. d.

$E_j = P_j(\omega)$ oraz $n_j S = \sqrt{j(j+1)RT}$.

gdzie $P_j(\omega)$ oznacza funkcyę kulistą rzędu j. Rozwiązania te przedstawiają fale stojące o okresie $= \frac{2\pi}{n_j}$. Dla E ze skaźnikiem parzystym jest równik linią węzłową (oprócz niego istnieją jeszcze inne linie węzłowe). Ciśnienie i prędkości na obu półkulach są symetryczne względem równika. E ze skaźnikami nieparzystemi należą do ruchów, odbywających się poprzez równik, przyczem prędkość b na jakiejkolwiek szerokości południowej jest równa co do wielkości i kierunku prędkości na tejże szerokości północnej, odchylenia zaś ciśnienia od wartości średniej są w obu tych szerokościach jednakowe, lecz o znaku przeciwnym.

Rozwiązanie ogólne będzie miało postać:

$$\varepsilon = \Sigma\, C_j E_j(\omega)\sin(n_j t + \delta_j), \quad b = \Sigma\, C_j \varphi_j(\omega)\cos(n_j t + \delta_j)$$

z dwoma szeregami stałych dowolnych C_j i δ_j, które dają się wyznaczyć z warunków początkowych dla b i ε. W przypadku niniejszym mamy więc do czynienia tylko z falami stojącemi.

Powyższe rozwiązanie zagadnienia o drganiach swobodnych atmosfery bez tarcia na kuli nieruchomej zostało podane przez lorda Rayleigha w zastosowaniu do Akustyki. Nie trudno rozszerzyć je na przypadek tarcia. Jeżeli jednak przejdziemy do kuli wirującej, to zadanie staje się bardzo trudnem i nie możnaby go rozwiązać bez zastosowania metody Laplace'a z teoryi przypływów i odpływów.

§ 4. Fale stojące i ruchy stateczne powietrza w warstwie sferoidalnej wirującej.

Zadanie polega na znalezieniu ruchu względnego powietrza w warstwie wirującej dla rozkładu strefowego ciśnień, przyczem wskutek odchyleń ruchu przez obrót, występuje już składowa równoleżnikowa c ruchu względnego. Prędkość kątową obrotu ziemi nazwijmy przez ν. Równania różniczkowe będą:

$$(3)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}=\dfrac{\partial b}{\partial t}-2\nu\cos\omega\,.\,c\,, \\[2ex] 0=\dfrac{\partial c}{\partial t}+2\nu\cos\omega\,.\,b\,, \\[2ex] 0=\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\dfrac{1}{S\sin\omega}\cdot\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega}\,. \end{cases}$$

Po wyrugowaniu ε i c pozostanie:

$$(4)\quad \frac{\partial^2 b}{\partial t^2}+4\nu^2\cos^3\omega\,.\,b-\frac{RT}{S^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\,\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,\partial\omega}=0.$$

Rozwiązaniom szczególnym można nadać postaci następujące:

$$(5)\quad \begin{cases} b=\varphi(\omega)\,.\cos nt\,,\quad c=\psi(\omega)\,.\sin nt\,,\quad \varepsilon=E(\omega)\sin nt\,, \\ \psi=-\dfrac{2\nu}{n}\cos\omega\,.\,\varphi\,,\quad E=-\dfrac{1}{nS\,.\sin\omega}\cdot\dfrac{\partial(\varphi\sin\omega)}{\partial\omega}\,. \end{cases}$$

Zamiast równania (4) otrzymamy:

$$(6)\qquad \frac{d}{d\omega}\,\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,d\omega}+(\varkappa p-\varkappa\cos^2\omega)\,\varphi=0,$$

$$\left[\varkappa=\frac{4\nu^2S^2}{RT},\quad p=\frac{n^2}{4\nu^2}\right].$$

Dla rozwiązania tego równania przedstawimy φ, jako szereg nieskończony:

$$(7)\qquad \varphi=\sin\omega\,.\,\Sigma\,a_j\cos^j\omega\,.$$

Podstawiwszy wyrażenie to w równanie (6) i przyrównywając do zera sumy spółczynników przy jednakowych potęgach wielkości $\cos\omega$, przekonamy się, że otrzymane w ten sposób zależności pomiędzy a_j rozpadają się na dwie całkiem niezależne od siebie grupy: ze skaźnikami j nieparzystemi i parzystemi. Będziemy więc mieli dwa niezależne od siebie rozwiązania. Dla jednego jest równik płaszczyzną symetryi (fale parzyste), w drugim ruch odbywa się poprzez równik (fale nieparzyste).

a) Fale stojące parzyste. Weźmy więc naprzód:

$$(8)\qquad \varphi=\sin\omega\,.\,(a_1\cos\omega+a_3\cos^3\omega+a_5\cos^5\omega+\ldots).$$

Pomiędzy spółczynnikami a_j znajdziemy następujące zależności

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2\,.\,3\,(a_3-a_1)+\varkappa p a_1=0,\\ 4\,.\,5\,(a_5-a_3)+\varkappa p a_3-\varkappa a_1=0,\\ 6\,.\,7\,(a_7-a_5)+\varkappa p a_5-\varkappa a_3=0 \text{ i t. d.. w ogóle:}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (j+1)(j+2)(a_{j+2}-a_j)+\varkappa p a_j-\varkappa a_{j-2}=0. \end{array}\right.$$

Dla rozwiązania powyższych równań z niewiadomemi: a_j oraz $\varkappa p=\frac{S^2n^2}{RT}$ idziemy za przykładem Laplace'a. Równanie w postaci ogólnej daje nam:

$$\frac{a_j}{a_{j-2}}=\frac{-\varkappa}{(j+1)(j+2)-\varkappa p-(j+1)(j+2)\,.\,\frac{a_{j+2}}{a_j}}\,.$$

Wyraziwszy analogicznie a_{j+2}/a_j, podstawimy je w powyższe wyrażenie, postąpimy w ten sam sposób z a_{j+4}/a_{j+2} i t. d. W ten sposób otrzymamy ułamek łańcuchowy:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{-\varkappa}{4.5-\varkappa p+}\,\frac{4.5\varkappa}{6.7-\varkappa p+}\,\frac{6.7\varkappa}{8.9-\varkappa p+}\ldots\ldots$$

Wyrażenie to na a_3/a_1 otrzymaliśmy z drugiego i następnych równań układu (9), z pierwszego zaś równania (9) mamy:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{2.3-\varkappa p}{2.3},$$

a z porównania obu wyrażeń wynika równanie:

$$(10)\qquad 0 = 2.3-\varkappa p+\frac{2.3\varkappa}{4.5-\varkappa p+}\,\frac{4.5\varkappa}{6.7-\varkappa p+}\,\frac{6.7\varkappa}{8.9-\varkappa p+}\ldots.$$

W równaniu tem $\varkappa$ jest wiadome, wielkość zaś niewiadomą $\varkappa p$, zależną od okresu szukanego drgania, można znaleźć drogą przybliżeń. Znalazłszy $\varkappa p$ z równania (10), łatwo już obliczyć z równań (9) spółczynniki a_j, przyczem a_1 pozostaje nieoznaczone. Liczba pierwiastków $\varkappa p$ równania (10) jest nieskończenie wielka; odpowiadają im pojedyńcze typy fal stojących. Autor podaje tabelkę kilku rozwiązań dla temperatury bezwzględnej: $T = 273^0$, $\varkappa = \frac{4\nu^2 S^2}{RT} = 10{,}94$. Podajemy jeden z przykładów, odpowiadający pierwszemu (najmniejszemu) pierwiastkowi $\varkappa p = 10{,}25$.

$$p = \frac{n^2}{4\nu^2} = 0{,}9369\,;\quad n = 2\nu\sqrt{p} = 1{,}936\nu\,;\quad \nu = 2\pi/24.60.60,$$

$$b = a_1 \cos nt \sin\omega \cos\omega\,[1-0{,}71\cos^2\omega + 0{,}20\cos^4\omega - 0{,}03\cos^6\omega + \ldots]$$

$$c = -a_1\frac{2\nu}{n}\sin nt.\sin\omega.\cos\omega\,[1-0{,}71\cos^2\omega + 0{,}20\cos^4\omega - \ldots]$$

$$\varepsilon = \frac{a_1}{nS}\sin nt\,[1 - 5{,}12\cos^2\omega + 4{,}55\cos^4\omega - 1{,}64\cos^6\omega$$
$$+ 0{,}32\cos^8\omega - 0{,}05\cos^{10}\omega + \ldots].$$

Widzimy z wzorów powyższych, iż na równiku i na biegunach prędkość zawsze jest $=0$. Dalej wystarczy rozpatrzeć to tylko, co się odbywa na półkuli północnej, ponieważ na półkuli południowej ciśnienia i prędkości są odbiciem w zwierciadle ciśnien i prędkości na półkuli północnej. W chwili początkowej, $t=0$, odchylenie ciśnienia ε równa się zeru, prędkość południkowa b – dodatnia (skierowana na południe), prędkość równoleżnikowa $=0$. W ciągu pierwszej ćwierci okresu ciśnienie spada na biegunie i wzrasta na równiku do chwili $t=\frac{\pi}{2n}$, jednocześnie maleje prędkość południkowa do zera, a równoleżnikowa wzrasta do maximum (w kierunku na zachód); następnie b zmienia kierunek na północ, podczas gdy c, malejąc, pozostaje skierowane na zachód. W chwili $t=\frac{\pi}{n}$ ciśnienie powraca do stanu początkowego — $\varepsilon=0$, b dochodzi do maximum w kierunku na północ, $c=0$. Następnie zaczyna się tworzyć maximum ciśnienia na biegunie i minimum na równiku, c przybiera kierunek na wschód, b pozostaje w kierunku północnym, malejąc ciągle aż do zera. W ostatniej ćwierci okresu ciśnienie wyrównywa się znowu, b wzrasta, c maleje do zera i wszystko powraca do stanu początkowego. Kierunek ruchu równoleżnikowego jest przeciwny regule Boys-Ballota. Okres tych zmian wynosi: $\theta^1=2\pi/n=2\pi/2\nu\sqrt{p}=0{\cdot}52$ doby.

Dwóm następnym pierwiastkom p odpowiadają okresy:

dla $p=2{,}3195$, $\theta_2=0{,}33$ doby;

dla $p=4{,}337$, $\theta_3=0{,}24$ doby.

b) Fale stojące nieparzyste, Kładziemy:

$$\varphi=\sin\omega\,(a_0+a_2\cos^2\omega+a_4\cos^4\omega\ldots.)$$

Spółczynniki są związane zależnościami:

$$1\,.\,2\,(a_2-a_0)+\varkappa p a_0=0,$$

$$3\,.\,4\,(a_4-a_2)+\varkappa p a_2-\varkappa a_0=0,$$

$$5\,.\,6\,(a_6-a_4)+\varkappa p a_4-\varkappa a_2=0,\quad \text{i t. d.}$$

z których obliczymy te spółczynniki w taki sam sposób jak poprzednio. Trzy pierwsze (najmniejsze) pierwiastki dla $\varkappa=10{,}94$ są:

$$p = 0{,}3447\,;\quad 1{,}567\,;\quad 3{,}238\,;$$

odpowiadają im okresy:

$$\theta = 0{,}85\,;\quad 0{,}40\,;\quad 0{,}28 \text{ doby}\,.$$

Z nieskończonej liczby rozwiązań parzystych i nieparzystych otrzymamy rozwiązanie ogólniejsze, biorąc ich sumę:

$$(11)\quad \begin{cases} b = \Sigma C_j . \varphi_j(\omega) . \cos(n_j t + \delta_j)\,, \\ c = -\Sigma C_j . 2\nu/n_j\ \varphi_j(\omega) . \cos\omega . \sin(n_j t + \delta_j)\,, \\ \varepsilon = -\Sigma C_j \dfrac{1}{n_j S} . \dfrac{d(\varphi_j \sin\omega)}{\sin\omega . d\omega} . \sin(n_j t + \delta_j)\,. \end{cases}$$

Stałe dowolne C_j i δ_j należy wyznaczyć ze stanu początkowego, dla którego b, c i ε są dane jako funkcye wielkości ω. Dwa nieskończone szeregi C_j i δ_j nie wystarczają jednak do zadośćuczynienia tym trzem warunkom, a więc powyższe rozwiązanie (11), przedstawiające fale stojące, nie jest jeszcze zupełne. Otóż równaniom różniczkowym (3) można jeszcze uczynić zadość, zakładając:

$$(12)\quad \begin{aligned} &b = 0, \quad c = \Psi(\omega), \quad \text{gdzie } \Psi \text{ jest pewną dowolną funkcyą wielkości } \omega, \\ &\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{2\nu S}{RT} \cos\omega . \Psi(\omega). \end{aligned}$$

Dołączając to rozwiązanie do (11), otrzymamy wszystko, aby uczynić zadość warunkom początkowym. Rozwiązanie (12) przedstawia ruch stateczny wzdłuż równoleżników, zgodny z regułą Buys-Ballotta. Równania (11) i (12) wyczerpują wszystkie ruchy, mogące nastąpić przy warunkach strefowych, bez tarcia.

§ 5. Tarcie. Ruchy zanikające proste.

Ograniczymy się do rozpatrzenia warstwy kulistej wirującej. Przyjmując tarcie jako proporcyonalne do prędkosci o spółczyn-

niku proporcyonalności l, będziemy mieli następujące równania różniczkowe:

$$(13)\quad \begin{cases} -\dfrac{RT}{S}\cdot\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \dfrac{\partial b}{\partial t} - 2\nu\cos\omega\,.\,c + l\,.\,b, \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial c}{\partial t} + 2\nu\cos\omega\,.\,b + l\,.\,c, \\[2ex] \dfrac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \dfrac{1}{S}\cdot\dfrac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,\partial\omega} = 0. \end{cases}$$

Po wyrugowaniu wielkości c i ε, otrzymamy równanie na b:

$$(14)\quad \frac{RT}{S^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}+l\right)\frac{\partial}{\partial\omega}\,\frac{\partial(b\sin\omega)}{\sin\omega\,\partial\omega} - \frac{\partial^3 b}{\partial t^3} - 2l\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} - (l^2+4\nu^2\cos^2\omega)\frac{\partial b}{\partial t} = 0.$$

Równaniu temu można uczynić zadość dwoma odmiennemi sposobami; w jednym przypadku otrzymamy ruchy zanikające proste [1], w drugim drgania peryodyczne zanikające. Rozpatrzymy naprzód pierwszy przypadek. Szukamy rozwiązania w postaci:

$$(15)\qquad b = e^{-\gamma t}\,.\,\varphi(\omega),$$

uważając γ za stałą dodatnią. Dla wyznaczenia funkcyi φ i stałej γ będziemy mieli równanie:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\omega}\,\dfrac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,.\,d\omega} + \varkappa' p'\varphi + \varkappa'\cos^2\omega\,.\,\varphi = 0, \\[2ex] \left[\varkappa' = \dfrac{\gamma}{l-\gamma}\cdot\dfrac{4\nu^2 S^2}{RT} = \dfrac{\gamma}{l-\gamma}\varkappa,\ p' = \left(\dfrac{l-\gamma}{2\nu}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Zaś c i ε wyrażają się przez wzory następujące:

$$(16a)\qquad c = -\frac{2\nu}{l-\gamma}\,e^{-\gamma t}\cos\omega\,.\,\varphi(\omega),\quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma S}\,e^{-\gamma t}\cdot\frac{d(\varphi\sin\omega)}{\sin\omega\,d\omega}.$$

Równanie (16) jest podobne do równania (6) z tą różnicą, że mamy

---

[1]) Margules nazywa je „zapełniającemi“ (ausfüllende).

$-\varkappa'$ zamiast $\varkappa$ i $-p'$ zamiast p. Rozwiążemy je też w podobny sposób, ograniczając się do rozwiązań parzystych, dla których równik jest płaszczyzną węzłową i płaszczyzną symetryi, kładąc:

$$\varphi = \sin\omega(a_1 \cos\omega + a_3 \cos^3\omega + \ldots). \tag{17}$$

Pomiędzy spółczynnikami a_1, a_2, istnieją związki następujące:

$$2.3(a_3 - a_1) + \varkappa' p'.a_1 = 0; \quad 4.5(a_5 - a_3) + \varkappa' p' a_3 + \varkappa' a_1 = 0 \text{ i t. d.}$$

$$\frac{a_j}{a_{j-2}} = \frac{\varkappa'}{(j+1)(j+2) - \varkappa' p'} - \frac{(j+1)(j+2)\varkappa'}{(j+3)\ (j+4) - \varkappa' p' - \ldots}$$

Postępując jak poprzednio, znajdujemy, iż dalsze rozwiązanie zależeć będzie od znalezienia pierwiastków równania:

$$0 = 2.3 - \varkappa' p' - \frac{2.3\varkappa'}{4.5 - \varkappa' p'} - \frac{4.5\varkappa'}{6.7 - \varkappa' p' - \ldots} \tag{18}$$

lecz obecnie sprawa komplikuje się bardzo przez to, że nietylko $\varkappa' p'$ jest niewiadome, lecz nieznane jest także i $\varkappa'$, które, podobnie jak p', zależy od szukanej wielkości γ. Nie pozostaje nic innego, jak tylko przyjąć na $\varkappa'$ szereg dowolnych wartości liczebnych i obliczyć odpowiadające im pierwiastki $\varkappa' p$; przyjmując $\varkappa'$ za odcięte, a $\varkappa' p'$ za rzędne, wykreśliliśmy krzywą, z której znajdziemy należyte wartości dla $\varkappa'$ i $\varkappa' p'$. Autor podaje tabelkę pierwiastków, wziętych poczęści z tej krzywej. Tylko takie wartości $\varkappa'$, które są zawarte pomiędzy 0 i 12,54, prowadzą do ruchów zanikających prostych; dla innych wartości $\varkappa'$ są p' i γ ilości zespolone. Ponieważ $\varkappa'$ jest dodatnie, a zatem i $\gamma/l - \gamma > 0$ (p. równ. (16)), dalej γ z założenia dodatnie, więc i $l - \gamma > 0$. Dalej z równań (13) wynika:

$$-\frac{RT}{S} \cdot \frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} = \frac{(l-\gamma)^2 + 4\nu^2 \cos^2\omega}{l - \gamma}\, b,$$

czyli $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}$ i b mają znaki przeciwne, a więc ruch wzdłuż południka odbywa się w kierunku spadku ciśnienia.

$$\frac{c}{b} = -\frac{2\nu}{l-\gamma}\cos\omega = \operatorname{tang}\xi,$$

ξ jest kątem, który kierunek ruchu wypadkowego tworzy z południkiem. Przypuśćmy, że $b<0$ (ruch w kierunku na północ), a więc że dziedzina ciśnienia mizkiego leży na północy, wówczas dla półkuli północnej jest składowa równoleżnikowa $c>0$ (kierunek ruchu na wschód). Dochodzimy przeto do ważnego wyniku, że ruchy „zapełniające" odbywają się zgodnie z regułą Buys-Ballota.

§ 6. Tarcie. Drgania zanikające w warstwie wirującej.

Wyrażenia (15) i (16a) na b, c i ε, jak to już zaznaczyliśmy, nie są jedynemi, czyniącemi zadość równaniom (13); równania te można jeszcze rozwiązać, kładąc:

$$(19)\quad \begin{cases} b = e^{-\alpha t}\left[\cos\beta t\,.\,\varphi_1(\omega) + \sin\beta t\,.\,\varphi_2(\omega)\right], \\ c = e^{-\alpha t}\left[\cos\beta t\,.\,\psi_1(\omega) + \sin\beta t\,.\,\psi_2(\omega)\right], \\ \varepsilon = e^{-\alpha t}\left[\cos\beta t\,.\,E_1(\omega) + \sin\beta t\,.\,E_2(\omega)\right], \end{cases}$$

i szukając funkcyj φ, ψ i E oraz stałych α i β. Rozwiązanie to przedstawia drgania peryodyczne o amplitudzie zanikającej. Postępowanie takie byłoby jednak bardzo trudne. Daleko prościej jest iść tą samą drogą, co i w przypadku poprzedzającym, t. j. założyć:

$$b = e^{-\gamma t}\varphi(\omega),$$

z tą różnicą, że teraz będziemy uważali γ za ilość zespoloną. $\varkappa'$ i p' jako też spółczynniki rozwinięcia:

$$\varphi = \sin\omega\,(a_1\cos\omega + a_3\cos^3\omega + \ldots)$$

muszą być zespolone. Kładąc $\gamma = \alpha + \beta i$, mamy:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\gamma}{l-\gamma}\varkappa = \varkappa' = P + iQ = Ue^{ui}; \quad P = \dfrac{al - a^2 - \beta^2}{(l-a)^2 + \beta^2}\cdot\varkappa; \\ \qquad\qquad Q = \dfrac{l\beta}{(l-a)^2+\beta^2}\cdot\varkappa; \\ \gamma(l-\gamma)\cdot\dfrac{\varkappa}{4\nu^2} = \varkappa' p' = M - iN = Ve^{vi}; \quad M = \dfrac{al - a^2 + \beta^2}{4\nu^2}\varkappa; \\ \qquad\qquad N = \dfrac{2a\beta - b\beta}{4\nu^2}\cdot\varkappa. \end{cases}$$

Rachunek wykonywa się w sposób następujący. Dla dowolnie obranego $\varkappa'$ szukamy odpowiadającego mu pierwiastka $\varkappa' p'$, czyniącego zadość równaniu (18). Następnie obliczamy ilości U, V, u, v, a przez nie $\varkappa$, l, a, β. Z równań (20) wynika:

$$\frac{\varkappa}{2\nu}(a+\beta i) = \sqrt{UV}\left(\cos\frac{u+v}{2} + i\sin\frac{u+v}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2\nu}(l-a-\beta i) = \sqrt{\frac{V}{U}}\left(\cos\frac{u-v}{2} - i\sin\frac{u-v}{2}\right),$$

dalej:

$$(21)\quad \begin{cases} \varkappa = U\dfrac{\sin\frac{u+v}{2}}{\sin\frac{u-v}{2}}, \quad \dfrac{1}{2\nu}a = \sqrt{\dfrac{V}{U}}\sin\dfrac{u-v}{2}\cot\dfrac{u+v}{2}, \\ \dfrac{1}{2\nu}l = \sqrt{\dfrac{V}{U}}\cdot\dfrac{\sin u}{\sin\frac{u+v}{2}}, \quad \dfrac{1}{2\nu}\beta = \sqrt{\dfrac{V}{U}}\sin\dfrac{u-v}{2}. \end{cases}$$

W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie, ale takie, które prowadzi do dwu wartości specyalnych $\varkappa$ i l (a więc i do specyalnej wartości na temperaturę, która wchodzi w wyrażenie na $\varkappa$), podczas gdy wartości te powinny być zgóry założone. Otóż, trzeba wykonać rachunek dla większej liczby dowolnie obranych $\varkappa'$, ażeby przez interpolacyę znaleść takie $\varkappa'$, któreby prowadziły do założonego $\varkappa$ i do dodatnich l.

Ilorazy następujących po sobie spółczynników a_j rozwinięcia (17) znajdziemy, jak poprzednio, za pomocą ułamków łańcucho-

wych. Pierwszy spółczynnik a_1 pozostaje nieoznaczonym. Ponieważ należy uważać go za zespolony, więc będziemy mieli w całce szczególnej dwie stałe dowolne, kładziemy:

$$a_j = A_j + iB_j .$$

Równania do wyznaczenia spółczynników a_j rozpadają się na dwie grupy, odpowiadające części rzeczywistej i urojonej:

$$\begin{aligned}
&2 . 3 (A_3 - A_1) + MA_1 + NB_1 = 0 , \\
&4 . 5 (A_5 - A_3) + MA_3 + NB_3 + PA_1 - QB_1 = 0 , \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&2 . 3 (B_3 - B_1) + MB_1 - NA_1 = 0, \\
&4 . 5 (B_5 - B_3) + MB_3 - NA_3 + PB_1 + QA_1 = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Jeżeli napiszemy jeszcze dla skrócenia:

$$A = \sin\omega \sum A_j \cos^j \omega , \quad B = \sin\omega \sum B_j \cos^j \omega ,$$

$$A' = \frac{d(A \sin\omega)}{\sin\omega \, d\omega} , \qquad B' = \frac{d(B \sin\omega)}{\sin\omega \, d\omega} ,$$

to otrzymamy rozwiązanie szczególne układu (13) w postaci następującej:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned}
b &= e^{-\alpha t} [\cos\beta t . A + \sin\beta t . B + i (\cos\beta t . B - \sin\beta t . A)] , \\
c &= - \frac{2\nu \cos\omega . e^{-\alpha t}}{(l-a)^2 + \beta^2} \left[\begin{matrix} \cos\beta t \{ (l-a) A - \beta B \} \\ + \sin\beta t \{ \beta A + (l-a) B \} \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. + i \left(\begin{matrix} \cos\beta t \{ \beta A + (l-a) B \} \\ - \sin\beta t \{ (l-a) A - \beta B \} \end{matrix} \right) \right] , \\
\varepsilon &= \frac{e^{-\alpha t}}{S(a^2+\beta^2)} \left[\begin{matrix} \cos\beta t \{ aA' + \beta B' \} \\ + \sin\beta t \{ - \beta A + aB' \} \end{matrix} \right. \\
&\qquad \left. + i \left(\begin{matrix} \cos\beta t \{ - \beta A' + aB' \} \\ - \sin\beta t \{ aA' + \beta B' \} \end{matrix} \right) \right] .
\end{aligned} \right.$$

Części rzeczywiste wzorów na b, c i ε przedstawiają same przez się rozwiązanie równań (13), podobnież spółczynniki przy i.

To drugie rozwiązanie nie daje jednak nic nowego i otrzymuje się z pierwszego, podstawiając $\beta t + \frac{\pi}{2}$ zamiast βt; A i B są identyczne z φ_1 odpowiednio φ_2 wzoru (19).

Margules podaje dwa przykłady liczebne, odpowiadające dwóm różnym spółczynnikom tarcia ($\varkappa = 10{,}94$, $T = 273^0$). Ciekawe jest porównanie wyników tych obliczeń z obliczeniami analogicznemi dla przypadku bez tarcia i dla ruchów zanikających prostych. W przypadku bez tarcia maximum b następuje na wszystkich szerokościach jednocześnie, przyczem c i ε stają się wszędzie równe 0; po upływie ćwierci okresu b staje się równe 0, a c i ε osiągają maximum. Otóż, wskutek tarcia, maximum b następuje na różnych szerokościach w różnych czasach: na biegunie później, niż na równiku, przyczem $c \neq 0$; długość okresu wahania przez tarcie powiększa się i to tem więcej, im większe jest tarcie. W przypadku drugim porównania ruchów zanikających wahadłowych z prostemi wynika, że pierwsze zanikają bez porównania szybciej niż drugie.

Ruchy wahadłowe wogóle nie zgadzają się z regułą Buys-Ballota. Otrzymane wyniki dają możność wytłómaczyć, dla czego w przyrodzie nie dostrzega się ruchów przeciwnych wspomnianej regule: przyczyna tego faktu tkwi w tem, że ruchy wahadłowe, powstające w atmosferze, zanikają wskutek tarcia bardzo prędko i są zamaskowane przez trwalsze ruchy proste, które odbywają się zgodnie z regułą Buys-Ballota.

Całki (22) i (15) są rozwiązaniami szczególnemi równań (13). Całki ogólne otrzymamy, biorąc sumy nieskończone całek szczególnych.

(Dokończenie nastąpi.)