COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIX 1968 FASC. 2

SUR LES ENSEMBLES ULTRAKRONECKERIENS

PAR

JEAN-PIERRE KAHANE (ORSAY)

Hartman, Rolewicz et Ryll-Nardzewski [1] ont introduit la notion d'ensemble *ultrakroneckerien*, ou ensemble UK. Un ensemble réel E est un ensemble UK si toute fonction de module 1 sur E y est uniformément approchable par des exponentielles imaginaires $e(\lambda t) = \exp(i\lambda t)$. Tout ensemble UK est discret et rationnellement indépendant. Tout ensemble positif discret $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots\}$ rationnellement indépendant, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = \infty,$$

est un ensemble UK; les auteurs demandent si c'est là une caractérisation des ensembles UK positifs (P 570). La présente note repond négativement à cette question.

THÉORÈME. *Etant donné des ensembles rationnellement indépendants finis de nombres positifs $E_n (n = 1, 2, \ldots)$, il en existe des homothétiques $a_n E_n (a_n > 0, n = 1, 2, \ldots)$ dont la réunion est un ensemble UK. De plus, on peut choisir a_n, pour chaque n, en fonction seulement de $E_1, E_2, \ldots, E_n$.*

Démonstration. On sait que, pour tout ensemble rationnellement indépendant fini E_0 et tout $\delta > 0$, il existe un nombre positif $A(E_0, \delta)$ avec la propriété suivante: à toute fonction $\alpha(\theta)$ de module 1 définie sur E_0 correspond au moins un y tel que

$$0 < y < A(E_0, \delta), \qquad |e(y\theta) - \alpha(\theta)| < \delta \qquad (\theta \in E_0).$$

Choisissons une suite δ_n décroissante tendant vers zéro. Définissons par induction deux suites positives a_n et ε_n, telles que

(1) $$\bigcup_{m\leqslant n} a_m E_m \text{ soit rationnellement indépendant,}$$

(2) $$a_n \geqslant \frac{1}{\varepsilon_n} A(E_n, \delta_n),$$

(3) $$\sup E_n a_n (\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \ldots) \leqslant \delta_n.$$

Pour montrer que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} a_n E_n$$

est un ensemble UK, on copie l'argument de [1]. Etant donnés une fonction $\beta(t)$ de module 1 définie sur E, et un $\delta > 0$, on choisit m tel que $2\delta_m < \delta$, puis λ_0 tel que

$$|e(\lambda_0 t) - \beta(t)| < \delta_m \quad \text{pour} \quad t \in \bigcup_{j<m} a_j E_j$$

(possible à cause de (1)). On définit $\lambda = \lambda_0 + x_m + x_{m+1} + \ldots$, où chaque x_n est ainsi choisi:

$$\left| e\big((\lambda_0 + x_m + \ldots + x_n)t\big) - \beta(t) \right| < \delta_n \quad \text{pour} \quad t \in a_n E_n,\ 0 < x_n < \varepsilon_n$$

(choix possible à cause de (2)). Alors, pour $t \in a_n E_n$, $n \geqslant m$, on a

$$\begin{aligned} |e(\lambda t) - \beta(t)| &\leqslant |e(\lambda_0 + x_m + \ldots + x_n)t - \beta(t)| + |e(x_{n+1} + \ldots)t - 1| \\ &\leqslant \delta_n + (\varepsilon_{n+1} + \ldots)\sup(a_n E_n) \leqslant 2\delta_n \end{aligned}$$

à cause de (3). Pour $t \in a_n E_n$, $n < m$, le même calcul donne

$$|e(\lambda t) - \beta(t)| < 2\delta_m.$$

Donc $|e(\lambda t) - \beta(t)| < \delta$ pour tout $t \in E$, donc E est un ensemble UK.

Il est clair que a_n ne dépend que de $E_1, E_2, \ldots, E_n$. De plus, il est évident qu'on peut choisir les a_n de telle sorte que l'ensemble $a_{n+1}E_{n+1}$ soit à droite de l'ensemble $a_n E_n$. En choisissant tous les E_n de la forme $\{1, a_n\}$, a_n irrationnel > 1, on voit qu'il existe un ensemble UK $\{t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots; t_{n+1} > t_n > \ldots > 0\}$ tel que la suite t_{2n}/t_{2n-1} soit une suite arbitraire de nombres irrationnels > 1.

Comme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne dépendent que de $E_1, E_2, \ldots, E_n$, on peut, au lieu de se donner les E_n au départ, les définir par induction. Par exemple, on peut choisir

$$E_{n+1} = \bigcup_{m \leqslant n} a_m E_m.$$

En choisissant pour E_1 un ensemble à 2 éléments, l'ensemble E obtenu est — à une homothétie près — l'ensemble des produits de la forme $a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_l} (k_1 < k_2 < \ldots < k_l)$. On peut poser le problème: quelles sont les suites positives croissantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ $(a_1 > 1)$, dont les produits d'un nombre quelconque de termes forment un ensemble UK **(P 640)**? Il est évidemment nécessaire que ces produits soient indépendants, et que

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log a_1 + \ldots + \log a_n}{2^n} > 0$$

(car on sait [1] qu'un ensemble UK est de type I_0 et que, pour un ensemble de type I_0, un intervalle de longueur $l > 2$ contient au plus $[\delta \log l]$ points, δ ne dépendant que de l'ensemble [2]).

TRAVAUX CITÉS

[1] S. Hartman, S. Rolewicz and C. Ryll-Nardzewski, *Ultra-Kroneckerian sets*, Colloquium Mathematicum 16 (1967), p. 225-229.

[2] J.-P. Kahane, *Ensembles de Ryll-Nardzewski et ensembles de Helson*, ibidem 15 (1966), p. 87-92.

Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1967