COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIX 1968 FASC. 2

SUR LES ENSEMBLES STATIONNAIRES ET DÉTERMINANTS POUR CERTAINES CLASSES DE DÉRIVÉES SYMÉTRIQUES

PAR

M. KULBACKA (ŁÓDŹ)

Cette communication concerne les fonctions réelles qui admettent la dérivée symétrique (dite aussi *dérivée de Schwarz*) partout dans un intervalle J. Un ensemble $E \subset J$ s'appellera *stationnaire* pour une classe C de fonctions lorsque toute fonction $f \in C$ est constante sur J dès qu'elle l'est dans E et il s'appellera *déterminant* pour cette classe, lorsque $f \in C$, $g \in C$ et $f = g$ dans E entraînent $f = g$ dans J.

Désignons d'une façon générale par $\varphi(C)$ la famille des ensembles stationnaires pour la classe C et par $\psi(C)$ celle des ensembles déterminants pour elle. Si $C_1 \subset C_2$, on a $\varphi(C_2) \subset \varphi(C_1)$ et $\psi(C_2) \subset \psi(C_1)$. Si C contient toutes les fonctions constantes, on a $\psi(C) \subset \varphi(C)$. Si la classe C est invariante par soustraction, on a $\varphi(C) \subset \psi(C)$.

Les familles des ensembles stationnaires et celles des ensembles déterminants ont été caractérisées par Marcus ([1] et [8]-[11]), Bruckner ([2]-[4]) et autres ([1], [4], [7]) pour beaucoup de classes de fonctions; il y a parmi elles les classes de dérivées ordinaires et approximatives. Pourtant, je n'ai pas rencontré dans la littérature des théorèmes sur les ensembles stationnaires et déterminants pour les classes de dérivées symétriques. C'est pourquoi je me propose d'examiner ici ces classes.

Les notations suivantes seront employées dans la suite:

$f^{(1)}, \bar{f}^{(1)}, \underline{f}^{(1)}$ pour dérivée symétrique, dérivée symétrique supérieure et dérivée symétrique inférieure de la fonction f respectivement;

mE, m^*E, m_*E pour mesure, mesure extérieure, mesure intérieure de l'ensemble E respectivement (la mesurabilité et la mesure étant entendues au sens de Lebesgue);

$\sim E$ pour $J \setminus E$.

Les classes suivantes de fonctions définies dans l'intervalle J seront envisagées:

C_1 — classe des dérivées symétriques bornées des fonctions absolument continues;

C_2 — classe des dérivées symétriques finies des fonctions absolument continues;

C_3 — classe des dérivées symétriques finies des fonctions continues;

C_4 — classe des dérivées symétriques qui sont finies à l'exception des points d'un ensemble au plus dénombrable;

C_5 — classe des dérivées symétriques (finies ou non) des fonctions continues;

C_6 — classe des dérivées symétriques des fonctions F de Baire ayant la propriété de Darboux et satisfaisant à la condition (N) de Lusin sur J, c'est-à-dire pour lesquelles $E \subset J$ et $mE = 0$ entraînent $mF(E) = 0$.

Marcus a prouvé dans son travail [11] que le complémentaire de tout ensemble stationnaire pour la classe des dérivées bornées est de mesure intérieure nulle. Il en résulte que la condition nécessaire pour qu'un ensemble E soit stationnaire pour les classes C_1-C_4 est que $m_*(\sim E) = 0$, car chacune de ces classes contient celle des dérivées bornées, la fonction primitive d'une dérivée bornée étant toujours absolument continue. Je vais démontrer que la condition $m_*(\sim E) = 0$ est en même temps suffisante pour qu'un ensemble E soit stationnaire pour les classes C_1-C_4. Vu que $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4$, il suffit d'établir le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si $m_*(\sim E) = 0$, l'ensemble E est stationnaire pour la classe C_4.*

Démonstration. Admettons que $f \in C_4$, que $m_*(\sim E) = 0$ et qu'il existe une constante λ telle que $f(x) = \lambda$ en tout point $x \in E$. Il s'ensuit de la définition de C_4 que $f(x) = F^{(1)}(x)$ pour une fonction continue F et que l'ensemble $\{x: f(x) = -\infty\} \cup \{x: f(x) = +\infty\}$ est au plus dénombrable. Posons

$$Z = \{x: x \in J, f(x) = \lambda\}.$$

Par suite d'identité

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2n\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right) - F\left(x-\frac{1}{n}\right)\right]$$

et de continuité de F la fonction f est de première classe de Baire, l'ensemble Z est donc mesurable. Vu que $E \subset Z$ et $m_*(\sim E) = 0$, on a $mZ = mJ$. La fonction

$$G(x) = F(x) - \lambda x$$

est continue dans J et on a $G^{(1)}(x) = f(x) - \lambda$, donc $G^{(1)}(x) = 0$ en tout $x \in Z$.

Mukhopadhyay (voir [13], théorème 5) a prouvé que φ étant une fonction continue definie dans l'intervalle J contenant le segment $a \leqslant x \leqslant b$ et assujettie aux conditions

1° $m\{x \in [a, b]: \varphi^{(1)}(x) = 0\} = b - a$,

2° l'ensemble $\{x \in [a, b]: \overline{\varphi}^{(1)}(x) = +\infty\} \cup \{x \in [a, b]: \underline{\varphi}^{(1)}(x) = -\infty\}$ est au plus dénombrable, la fonction φ est constante sur ce segment.

C'est une généralisation du théorème de Mazurkiewicz [12] d'après lequel une fonction continue sur un segment et dont la dérivée symétrique s'annule en tout point intérieur de ce segment est constante sur lui.

En vertu du théorème de Mudhopadhyay, la fonction G est constante sur J. Il en résulte que $G^{(1)}(x) = f(x) - \lambda = 0$ pour tout $x \in J$, c'est-à-dire que $f(x) = \lambda$ sur J, ce qui achève la démonstration.

Le théorème 1 donne une caractérisation de la famille des ensembles stationnaires pour les classes C_1-C_4.

Or les classes C_1-C_3 contenant toutes les fonctions constantes et étant invariantes par soustraction, les ensembles dont les complémentaires sont de mesure intérieure nulle constituent une famille des ensembles déterminants pour chacune des classes C_1-C_3.

Envisageons à présent la classe C_5. La condition $m_*(\sim E) = 0$ est nécessaire pour qu'un ensemble E soit stationnaire pour la classe C_5, car $C_4 \subset C_5$. On ignore cependant si cette condition est suffisante. Le théorème qui suit établit la suffisance déjà d'une condition moins faible.

THÉORÈME 2. *Si $\sim E$ est un ensemble totalement imparfait* (¹), *E est un ensemble stationnaire pour la classe C_5.*

Ce théorème résulte immédiatement du lemme suivant dont la démonstration (de même que la démonstration du lemme 2 qui précédera le théorème 3) est modelée sur celle du théorème 1 du travail [2] de Bruckner (les deux lemmes sont des généralisations du théorème précité de Mazurkiewicz).

LEMME 1. *F étant une fonction continue sur J qui a la dérivée symétrique en tout point de J, la condition $F^{(1)}(x) = \lambda$ pour tout $x \in E$, où $\sim E$ est un ensemble totalement imparfait, entraîne que $F(x) - \lambda x =$* const.

Démonstration. En posant $H = \{x: x \in J,\ F^{(1)}(x) \neq \lambda\}$ on a $H \subset \sim E$; donc H est un ensemble totalement imparfait. En outre H est un F_σ; en vertu du théorème de Souslin (voir par exemple [15]) d'après lequel tout ensemble analytique contient un ensemble non vide parfait, H est donc au plus dénombrable. On a par conséquent $|F^{(1)}(x)| < \infty$ à l'exception d'un ensemble au plus dénombrable. Il en résulte en vertu du théorème précité de Mudhopadhyay que la fonction $F(x) - \lambda x$ est constante sur J. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Envisageons pour terminer la classe C_σ.

LEMME 2. *Soit F une fonction de Baire ayant la propriété de Darboux, satisfaisant à la condition* (N) *et possédant la dérivée symétrique, finie ou infinie en tout point de l'intervalle J. Soit $E \subset J$ un ensemble dont le complémentaire $\sim E$ est totalement imparfait. Alors, si $F^{(1)}(x) = \lambda$ sur E, on a $F(x) = \lambda x +$* const.

(¹) Un ensemble est dit *totalement imparfait* s'il ne contient aucun sous-ensemble non vide parfait. Chaque ensemble imparfait est de mesure intérieure nulle.

Démonstration. On conclut, tout comme dans la démonstration du lemme 1, que $|F^{(1)}(x)| < \infty$ sur J sauf un ensemble au plus dénombrable. En vertu du théorème de Khintchine ([6], p. 217) d'après lequel une fonction mesurable est dérivable en presque tout point où $\bar{F}^{(1)}(x) < \infty$, la fonction F est dérivable sur $\sim B$, où B est un ensemble de mesure nulle. Il en résulte d'après un théorème de Saks ([14], p. 227) que

$$m^* F(\sim B) \leqslant \int_{\sim B} |F^{(1)}(x)|\, dx = |\lambda|\, m(\sim B) = |\lambda|\, mJ.$$

F étant assujettie à la condition (N), on a donc $m^* F(J) \leqslant |\lambda|\, mJ$, d'où $mF(J) \leqslant |\lambda|\, mJ$ par suite de la propriété de Darboux. En remplaçant J par un intervalle arbitraire $I \subset J$, on parvient à l'inégalité

$$mF(I) \leqslant |\lambda|\, mI$$

qui signifie que F satisfait à la condition de Lipschitz sur J. En conséquence, la fonction F est absolument continue sur J. Comme $F'(x) = \lambda$ presque partout sur J, le lemme 2 se trouve démontré.

Remarques. 1. L'exemple de la fonction définie par la formule

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 & \text{pour} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

montre que l'hypothèse sur la propriété de Darboux de la fonction F ne peut pas être omise dans le lemme 2.

2. En admettant que $|F^{(1)}(x)| < \infty$ sur J, l'hypothèse que F est une fonction de Baire est superflue dans l'énoncé du lemme 2, car l'appartenance de F à la classe des fonctions de Baire résulte dans ce cas d'un théorème de Charzyński ([5], p. 219) d'après lequel la fonction F est continue sur J excepté un ensemble au plus dénombrable.

Le théorème suivant est une conséquence immédiate du lemme 2:

THÉORÈME 3. *L'ensemble dont le complémentaire est totalement imparfait est stationnaire pour la classe des dérivées symétriques des fonctions de Baire ayant la propriété de Darboux et satisfaisant à la condition* (N) *de Lusin, en particulier pour la classe des dérivées symétriques finies de ces fonctions.*

Enfin on a le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *Le seul ensemble stationnaire pour la classe des dérivées symétriques des fonctions de Baire satisfaisant à la condition* (N) *de Lusin est l'intervalle tout entier où ces fonctions sont définies.*

TRAVAUX CITÉS

[1] N. Boboc et S. Marcus, *Sur la détermination d'une fonction par les valeurs prises sur un certain ensemble*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 76 (1959), p. 151-159.

[2] A. M. Bruckner, *Stationary sets for certain classes of derivatives of Darboux functions*, The Michigan Mathematical Journal 11 (1964), p. 305-309.

[3] — *An affirmative answer to a problem of Zahorski and some consequences*, ibidem 13 (1966), p. 15-26.

[4] — and J. Leonard, *Stationary sets and determining sets for certain classes of Darboux functions*, Proceedings of the American Mathematical Society 16 (1965), p. 935-940.

[5] Z. Charzyński, *Sur les fonctions dont la dérivée symétrique est partout finie*, Fundamenta Mathematicae 21 (1933), p. 214-225.

[6] A. Khintchine, *Recherches sur la structure des fonctions mesurables*, ibidem 9 (1927), p. 212-279.

[7] M. Kulbacka, *Sur certaines propriétés des dérivées approximatives*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des sciences mathématiques, astronomiques et physiques, 12 (1964), p. 17-20.

[8] S. Marcus, *Sur la détermination d'une fonction intégrable Riemann par les valeurs prises sur un ensemble partout dense*, Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la République Populaire Roumaine 2 (1958), p. 433-439.

[9] — *Sur une généralisation de quasi-analycité*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris) 254 (1962), p. 985-987.

[10] — *Sur les ensembles déterminants des dérivées approximatives*, ibidem 255 (1962), p. 1685-1687.

[11] — *Les ensembles stationnaires de certaines classes de fonctions dérivées*, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Memorie Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 32 (1962), p. 484-487.

[12] S. Mazurkiewicz, *O pierwszej pochodnej uogólnionej*, Prace Matematyczno-Fizyczne 28 (1917), p. 79-85.

[13] S. N. Mukhopadhyay, *On Schwarz differentiability IV*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 17 (1966), p. 129-136.

[14] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa — Lwów 1937.

[15] W. Sierpiński, *General topology*, Toronto 1952.

Reçu par la Rédaction le 1. 4. 1967