COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIX 1968 FASC. 2

UNE REMARQUE SUR LA CONTINUITÉ ET LA CONNEXITÉ

PAR

J. S. LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

On dit qu'une fonction réelle $f(x)$ d'une variable réelle *a la propriété de Darboux* (en abrégé, *la propriété* (D)) lorsque pour tout couple de nombres α, β, où $\alpha < \beta$, et pour tout nombre

$$y \in \big(\min(f(\alpha), f(\beta)), \max(f(\alpha), f(\beta))\big)$$

il existe un point ξ tel que $\alpha < \xi < \beta$ et que $f(\xi) = y$. Toute fonction continue a la propriété (D), mais il existe des fonctions discontinues qui l'ont aussi. Les fonctions ayant la propriété (D) ont été étudiées en détail par Bruckner et Ceder [1]. On connaît différentes conditions suffisantes pour qu'une fonction ayant la propriété (D) soit continue. L'une d'elles, bien connue, est que la fonction ait une fonction inverse. Un résultat plus fort est dû à Gillespie [4]: si une fonction $f(x)$ a la propriété (D) et si l'intérieur de l'ensemble des nombres y pour lesquels les ensembles $f^{-1}(y)$ sont infinis est vide, la fonction $f(x)$ est continue. Évidemment, la condition suffisante énoncée dans ce théorème peut être formulée comme suit: l'ensemble des nombres y tels que $f^{-1}(y)$ est vide ou fini est dense. Cependant, la condition de Gillespie n'est pas nécessaire, car il existe des fonctions continues, la fonction de Weierstrass sans dérivée par exemple, qui ne satisfont pas à cette condition. Une condition à la fois nécessaire et suffisante a été établie par Bruckner et Bruckner [2]: elle consiste en ce que tous les ensembles $f^{-1}(y)$ soient fermés. Toutefois cette condition n'entraîne pas celle de Gillespie, ni réciproquement.

Dans cette communication, je me propose d'établir, entre autres, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ayant la propriété (D) soit continue, mais en traitant le problème d'une façon plus générale. La propriété (D) équivaut à ce que les images des ensembles connexes soient connexes. Soit $\varphi(x)$ une transformation de l'espace topologique X en l'espace topologique X^*. Convenons de dire que *la transformation* $\varphi(x)$ *a la propriété* (D) si elle est connexe, c'est-à-dire si la connexité d'un ensemble $E \subset X$ entraîne toujours celle de son image $\varphi(E)$. Les rapports entre la continuité et la connexité d'une fonction ont été étudiés par divers auteurs (voir par exemple Bruckner et Bruckner [2], Fan et Struble [3] et Tanaka [5]). En particulier, on trouve dans [2] des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation connexe soit continue lorsque X est un espace euclidien et X^* un espace métrique localement compact.

Il sera question ici de fonctions réelles $f(x)$ définies dans un espace topologique X. Une telle fonction sera dite *ayant la propriété* (G) lorsqu'il existe un ensemble de nombres réels Y dense dans la droite et tel que, pour $y \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est fermé.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une fonction réelle $f(x)$ définie dans un espace topologique localement connexe soit continue, il faut et il suffit qu'elle ait les propriétés* (G) *et* (D).

Démonstration. La connexité de toute fonction continue f et la propriété de telle fonction que les ensembles $f^{-1}(y)$ sont fermés sont connues. Il suffit donc de montrer que la condition du théorème est suffisante.

Admettons qu'une fonction $f(x)$ ait les propriétés (G) et (D). Il existe alors sur la droite un ensemble Y dense dans elle et tel que pour tout $y_0 \in Y$ l'ensemble $X \setminus f^{-1}(y_0)$ est ouvert. On sait que, dans un espace localement connexe, les composantes d'ensembles ouverts sont des ensembles ouverts (cette propriété caractérise les espaces localement connexes). Soit C une composante de l'ensemble $X \setminus f^{-1}(y_0)$. Évidemment, $y_0 \notin f(C)$. En vertu de la condition (D), l'ensemble $f(G)$ est connexe. Pour tout $y \in f(C)$, on a donc ou bien $y > y_0$, ou bien $y < y_0$. Soit E^+ la somme de toutes les composantes C de l'ensemble $X \setminus f^{-1}(y_0)$ telles que $y \in f(C)$ entraîne $y > y_0$. L'ensemble E^+ est ouvert, car il est somme d'ensembles ouverts. On voit aisément que $E^+ = \{x: f(x) > y_0\}$. L'ensemble Y étant dense dans la droite, on a

$$\{x: f(x) > a\} = \bigcup_{y \in Y, y > a} \{x: f(x) > y\}$$

pour tout a réel. Les ensembles $\{x: f(x) > a\}$ sont donc ouverts. On montre de façon analogue que l'ensemble $\{x: f(x) < a\}$ est ouvert pour tout nombre a. On en déduit par un raisonnement bien connu la continuité de la fonction $f(x)$.

L'hypothèse de la connexité locale de l'espace X est essentielle dans cette démonstration. Peut-être serait-il possible de l'atténuer. On peut poser dans cet order d'idées la question suivante:

P 639. En admettant que toute fonction réelle définie dans un espace topologique X et ayant les propriétés (D) et (G) est continue, l'espace X est-il nécessairement localement connexe?

On a toutefois le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si pour tout sous-espace ouvert X d'un espace topologique X_0 toute fonction définie dans X et ayant les propriétés* (D) *et* (G) *est continue, l'espace X_0 est localement connexe.*

Démonstration. Admettons à présent qu'un espace topologique X_0 n'est pas localement connexe. Il y existe alors un sous-espace ouvert $X \subset X_0$ tel que pour les fonctions définies dans X les propriétés (D) et (G) n'en entraînent pas la continuité. En effet, en vertu de la caractérisation des espaces localement connexes qui vient d'être mentionnée, il existe un ensemble $G \subset X$ ouvert dans X et dont au moins une composante C n'est pas un ensemble ouvert dans X. Posons $X = G$ et

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \in C, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in X \setminus C. \end{cases}$$

La propriété (D) de la fonction f ainsi définie est évidente. Soit Y l'ensemble des nombres réels distincts de 0 et 1. Il est dense dans la droite et on a $f^{-1}(y) = \emptyset$ pour $y \in Y$. La fonction $f(x)$ a donc aussi la propriété (G). On a en même temps

$$\{x: f(x) > 0\} = C.$$

L'ensemble C n'étant pas ouvert, la fonction $f(x)$ ne satisfait pas à la condition nécessaire pour la continuité d'une fonction.

TRAVAUX CITÉS

[1] A. M. Bruckner and J. G. Ceder, *Darboux continuity*, Jahresberichte der Deutschen Mathematischen Vereinigung 67 (1965), p. 93-117.

[2] A. M. Bruckner and J. B. Bruckner, *Darboux transformations*, Transactions of the American Mathematical Society (sous presse).

[3] K. Fan and R. Struble, *Continuity in terms of connectedness*, Indagationes Mathematicae 16 (1954), p. 161-164.

[4] D. Gillespie, *A property of continuity*, Bulletin of the American Mathematical Society 28 (1922), p. 245-250.

[5] T. Tanaka, *On the family of connected subsets and the topology of spaces*, Journal of the Mathematical Society of Japan 7 (1955), p. 161-164.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 31. 8. 1966