COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVIII DÉDIÉ À M. TADEUSZ WAŻEWSKI 1967

REMARQUE SUR LA STABILITÉ D'UNE SOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À PARAMÈTRE RETARDÉ

PAR

Z. MIKOŁAJSKA (KRAKÓW)

Elsgolc démontra (voir [2]) que les théorèmes concernant la deuxième méthode de Liapounoff sont valables aussi pour des systèmes d'équations différentielles à paramètre retardé, mais il remarque qu'il est difficile, en général, d'évaluer le signe de la dérivée totale d'une fonction de Liapounoff par rapport à un système de telles équations. La méthode de Liapounoff sera modifiée dans la communication présente en remplaçant la condition sur le signe de la dérivée totale par une autre condition qui n'est pas nécessaire mais qui suffit pour la stabilité asymptotique. Une autre modification de la méthode de Liapounoff est due à Krasovskiĭ (voir [3]).

1. Remarque 1. Pour établir la stabilité asymptotique (au sens de Liapounoff) de la solution $x = 0$ du système

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big) \qquad (h > 0) \tag{1.1}$$

où $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, $f = f_1, f_2, \ldots, f_n$ et dont les seconds membres sont de la classe C^1, il n'est pas nécessaire de construire une fonction définie positive et décroissante le long de chaque solution de (1.1), mais il suffit de construire une fonction $V(t, x)$ définie positive et telle que

1° il existe pour la fonction

$$v\big(t; \varphi(\cdot)\big) = V\big(t; x(t; \varphi(\cdot))\big) \tag{1.2}$$

un $r > 0$ tel que

$$v\big(t; \varphi(\cdot)\big) \to 0 \quad \text{avec} \quad t \to \infty \tag{1.3}$$

uniformément par rapport à $\varphi(t)$ supposé que $|\varphi(t)| \leqslant r$, la fonction $x\big(t; \varphi(\cdot)\big)$ dans (1.2) désignant la solution du système (1.1) avec la condition initiale

$$x\big(t; \varphi(\cdot)\big) = \varphi(t) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{1.4}$$

2° il existe un $a > 0$ tel que

$$V(t, x) \geqslant a > 0 \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant r. \tag{1.5}$$

En effet, soit $V(t, x)$ une fonction définie positive et satisfaisant à la condition (1.3). Il résulte de (1.5), (1.3) et de l'hypothèse que $V(t, x)$ est définie positive que chaque solution de (1.1) avec la condition initiale (1.4) où $|\varphi(t)| \leqslant r$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$ tend vers zéro avec $t \to \infty$. La stabilité au sens de Liapounoff de la solution $x = 0$ du système (1.1) se démontre alors comme suit.

Soit $0 < \varepsilon < r$. La fonction $V(t, x)$ étant définie positive, il existe d'après 2° une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$V(t, x) > c_\varepsilon \quad \text{où} \quad \varepsilon < |x|. \tag{1.6}$$

En vertu de (1.3), il existe un $T_{c_\varepsilon} > 0$ indépendent de la fonction initiale $\varphi(t)$ et tel que

$$v\big(t; \varphi(\cdot)\big) = V\Big(t, x\big(t; \varphi(\cdot)\big)\Big) \leqslant c_\varepsilon \quad \text{pour} \quad T_{c_\varepsilon} \leqslant t < \infty. \tag{1.7}$$

On a en vertu de (1.6) et (1.7)

$$\big|x\big(t; \varphi(\cdot)\big)\big| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad T_{c_\varepsilon} \leqslant t < +\infty, \tag{1.8}$$

les $\varphi(t)$ étant telles que $|\varphi(t)| \leqslant r$ pour $-h \leqslant t \leqslant 0$. La solution $x\big(t; \varphi(\cdot)\big)$ dépend de $\varphi(\cdot)$ d'une façon continue et, par suite, il existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$\big|x\big(t; \varphi(\cdot)\big)\big| < \varepsilon$$

pour $-h \leqslant t \leqslant T_{c_\varepsilon}$ et pour $|\varphi(t)| \leqslant \delta_\varepsilon$ lorsque $-h \leqslant t \leqslant 0$.

La stabilité requise est ainsi démontrée.

2. Remarque 2. Pour réaliser (1.3), il suffit d'admettre l'inégalité différo-différentielle

$$v'\big(t; \varphi(\cdot)\big) = \frac{d}{dt} V(t, x)_{(1.1)} \leqslant F\big(t, v(t; \varphi), v(t-h; \varphi)\big) \tag{2.1}$$

où la fonction $F(t, u, v)$ est continue, strictement croissante par rapport à v et telle que chaque solution de l'équation

$$w'(t) = F\big(t, w(t), w(t-h)\big) \tag{2.2}$$

tend vers zéro pour $t \to \infty$. La convergence (1.3) est alors une conséquence immédiate du fait que

$$w(t) > v(t) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0 \tag{2.3}$$

entraîne

$$w(t) > v(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{2.4}$$

quelle que soit la solution $w(t)$ de l'équation (2.2)

Exemple 1. Admettons les hypothèses

$$xf(t, x, y) \leqslant a|x|^2 + b|x||y|, \tag{2.5}$$

$$b > 0, \tag{2.6}$$

(2.7) Re $s_k < 0$ pour chaque racine s_k de l'équation

$$s - a - be^{-sh} = 0. \tag{2.8}$$

Alors la solution $x = 0$ du système (1.1) est asymptotiquement stable. En effet, on peut supposer dans le cas envisagé

$$V(t, x) = V(x) = \tfrac{1}{2}|x|^2,$$

$$\frac{dV}{dt_{(1.1)}} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\big(t, x(t), x(t-h)\big) \leqslant 2aV\big(x(t)\big) + 2b\sqrt{V\big(x(t)\big)}\sqrt{V\big(x(t-h)\big)}.$$

Soit $F(t, u, v)$ une fonction de la forme

$$F(t, u, v) = 2au + 2b\sqrt{u}\sqrt{v}.$$

Elle est strictement croissante par rapport à v (pour u et v positifs). Envisageons comme l'équation (2.2) la suivante:

$$w'(t) = 2aw(t) + 2b\sqrt{w(t)}\sqrt{w(t-h)}.$$

Posons $z(t) = \sqrt{w(t)}$. On a alors

$$z'(t) = az + bz(t-h). \tag{2.9}$$

Dans ce cas, $z(t) \to 0$ implique $w(t) \to 0$. Mais l'hypothèse (2.8) est une condition suffisante pour la convergence de toutes les solutions de l'équation (2.9) vers zéro (cf. [1]) et, par suite, toutes les solutions de l'équation (2.2) tendent vers zéro pour $t \to \infty$.

3. L'étude de l'allure des solutions d'une équation différentielle sans retardement est plus facile que celle des solutions d'une équation différo-différentielle. C'est pourquoi dans la suite les solutions du système (1.1) seront comparées à celles d'une équation différentielle sans retardement.

LEMME 1. *Etant donné l'inégalité*

$$v'(t) \leqslant g\big(t, v(t), v(t-h)\big) \tag{3.1}$$

pour

$$h > 0, \tag{3.2}$$

et dans laquelle la fonction $g(t, u, v)$ est continue et strictement croissante par rapport à v, soit $z(t)$ une solution strictement croissante de l'équation

différentielle

$$z'(t) = g\big(t, z(t), z(t)\big), \tag{3.3}$$

telle que

$$z(t) \geqslant v(t) \quad \textit{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0. \tag{3.4}$$

Alors

$$z(t) \geqslant v(t) \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Démonstration. Désignons par t_0 le plus grand t tel que

$$z(t) \geqslant v(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0 \tag{3.6}$$

et supposons que $t_0 < \infty$. La continuité de $z(t)$ et $v(t)$ entraîne en vertu de (3.6) l'égalité

$$z(t_0) = v(t_0); \tag{3.7}$$

par conséquent,

$$v'(t_0) \leqslant g\big(t_0, z(t_0), v(t_0-h)\big).$$

La fonction $g(t, u, v)$ étant strictement croissante par rapport à v, on conclut de (3.2) et (3.6) que

$$v'(t_0) \leqslant g\big(t_0, z(t_0), z(t_0-h)\big).$$

La fonction $z(t)$ étant strictement croissante on a en vertu de (3.2)

$$v'(t_0) < g\big(t_0, z(t_0), z(t_0)\big) = z'(t_0),$$

d'où

$$v(t) < z(t) \quad \text{pour} \quad t_0 < t < t_0+\varepsilon$$

où $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Or c'est incompatible avec la définition de t_0.

Remarque 3. L'exemple suivant montre que l'hypothèse de la croissance stricte de $z(t)$ ne peut pas être omise. Soit

$$v'(t) = -2v(t)+v(t-h) \quad \text{où} \quad h > 0$$

et

$$v(t) = k > 0 \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0.$$

On a

$$g(t, v, w) = -2v+w, \quad g(t, z, z) = -z.$$

En posant $z(t) = ke^{-t}$, il vient

$$z(t) \geqslant v(t) = k \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0,$$

$$z(0) = v(0) = k.$$

On a pour $0 \leqslant t \leqslant h$

$$v'(t) = -2v(t)+k$$

et par suite

$$v(t) = \tfrac{1}{2}ke^{-2t}+\tfrac{1}{2}k \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant h.$$

En posant $\sigma(t) = v(t)-z(t)$, il vient

$$\sigma(0) = v(0)-z(0) = 0,$$

$$\sigma'(t) = ke^{-t}(1-e^{-t}) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t \leqslant h$$

et par suite $\sigma(t) > 0$ pour $0 < t \leqslant h$, d'où

$$v(t) > z(t) \quad \text{pour} \quad 0 < t \leqslant h.$$

4. Envisageons le système d'équations

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(t-h)\big) \tag{4.1}$$

où $x = x_1, \ldots, x_n$, $f = f_1, \ldots, f_n$ et

$$h > 0. \tag{4.2}$$

Admettons les hypothèses suivantes:

(H_1) La fonction $f(t, x, y)$ est de classe C^1 pour $t \geqslant -h$, x et y quelconque et l'on a

$$f(t, 0, 0) = 0. \tag{4.3}$$

(H_2) Il existe une fonction $V(t, x)$ de classe C^1, définie positive et dont la dérivée totale par rapport à (4.1) satisfait à la condition

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt_{(4.1)}} &= V_t\big(t, x(t)\big) + \sum_{r=1}^{n} V_{x_i}\big(t, x(t)\big) f_i\big(t, x(t), x(t-h)\big) \\ &\leqslant \Phi\Big(t, V\big(t, x(t)\big)\Big) + r\Big[t, V\big(t, x(t)\big), V\big(t-h, x(t-h)\big)\Big], \end{aligned} \tag{4.4}$$

dans laquelle

(a) la fonction $r(t, u, v)$ est pour $t \geqslant 0$, $u > 0$ et $v > 0$ continue et strictement croissante par rapport à v, et

$$r(t, u, v) > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,\ u > 0,\ v > 0; \tag{4.5}$$

(b) la fonction $\Phi(t, v)$ est de classe C^1 et l'on a $\Phi(t, 0) \equiv 0$ pour $-2h \leqslant t < \infty$. Ceci posé, envisageons l'équation

$$v' = \Phi(t, v). \tag{4.6}$$

Désignons par $\psi(t; \tau, v)$ la solution de (4.6) telle que $\psi(\tau, \tau, v) \equiv v$. Admettons que chaque solution $\psi(t; 0, v)$ de (4.6) est définie dans tout intervalle $-2h \leqslant t < \infty$. On a $\psi(t; 0, y) > 0$ pour $t \geqslant -2h$ et $y > 0$

en vertu de (b). On peut introduire par suite pour $t \geqslant -h$ et $y > 0$ la fonction suivante:

$$g(t, y) = \psi_v\big(0; t, \psi(t; 0, y)\big) \cdot r\big(t, \psi(t; 0, y), \psi(t-h; 0, y)\big).$$

Comme $\psi_v > 0$, on a en vertu de (4.5)

$$g(t, y) > 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant -h \text{ et } y > 0.$$

(H_3) Soit enfin

$$\lim_{t\to\infty} \psi\big(t; 0, y(t)\big) = 0 \tag{4.7}$$

pour toute solution $y(t)$ de l'équation

$$y' = g(t, y). \tag{4.8}$$

THÉORÈME T. *Les hypothèses* (H_1)-(H_3) *étant admises, la solution* $x \equiv 0$ *de* (4.1) *est asymptotiquement stable au sens de Liapounoff.*

Démonstration. Considérons la fonction

$$U(t, x) = \psi\big(0; t, V(t, x)\big). \tag{4.9}$$

En vertu de la définition de la fonction $\psi(t; t_0, u_0)$, on a

$$V(t, x) = \psi\big(t; 0, U(t, x)\big). \tag{4.10}$$

Le long d'une solution $x(t)$ du système (4.1) pour

$$u(t) = U\big(t, x(t)\big) \quad \text{et} \quad v(t) = V\big(t, x(t)\big),$$

on a

$$u'(t) = \frac{d}{dt} U(t, x)_{(4.1)} = \psi_\tau\big(0; t, v(t)\big) + \psi_v\big(0; t, v(t)\big) v'(t) = \psi_\tau\big(0; t, v(t)\big) +$$

$$+ \psi_v\big(0; t, v(t)\big) \cdot \Big[V_t\big(t, x(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} V_{x_i}\big(t, x(t)\big) f_i\big(t, x(t), x(t-h)\big)\Big],$$

d'où en vertu de (4.4),

$$u'(t) \leqslant \psi_\tau\big(0; t, v(t)\big) + \tag{4.11}$$
$$+ \psi_v\big(0; t, v(t)\big)\big\{\Phi\big(t, v(t)\big) + r\big(t, v(t), v(t-h)\big)\big\}.$$

En vertu de la définition de $\psi(t; \tau, v)$, on a

$$\psi_\tau(0; t, v) + \psi_v(0; t, v)\Phi(t, v) \equiv 0,$$

d'où en vertu de (4.11),

$$u'(t) \leqslant \psi_v\big(0; t, v(t)\big) r[t, v(t), v(t-h)],$$

donc en vertu de (4.10),

$$u'(t) \leqslant \psi_v\Big(0; t, \psi\big(t; 0, u(t)\big)\Big) r\Big(t, \psi\big(t; 0, u(t)\big), \psi\big(t-h; 0, u(t-h)\big)\Big). \tag{4.12}$$

Posons

$$\gamma(t, u, v) = \psi_v\big(0; t, \psi(t; 0, u)\big) r\big(t, \psi(t; 0, u), \psi(t-h; 0, v)\big). \tag{4.13}$$

Vu que $\psi_v > 0$ et que la fonction $r(t, u, v)$ est strictement croissante par rapport à v, la fonction $\gamma(t, u, v)$ l'est également et on a

$$g(t, y) = \gamma(t, y, y).$$

Envisageons une solution quelconque $y(t)$ de (4.8) telle que

$$y(-h) \geqslant \max_{-h \leqslant t \leqslant 0} u(t). \tag{4.14}$$

La fonction $y(t)$ étant croissante pour $t \geqslant -h$, on a

$$y(t) \geqslant u(t) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t \leqslant 0 \tag{4.15}$$

et en vertu du lemme 1, (4.15) subsiste pour tout $t \geqslant -h$. On a d'après (4.10)

$$v(t) = \psi\big(t; 0, u(t)\big).$$

La fonction $\psi(t; 0, u)$ étant croissante par rapport à u, on conclut de (4.15) que

$$0 \leqslant v(t) = \psi\big(t; 0, u(t)\big) \leqslant \psi\big(t; 0, y(t)\big) \quad \text{pour} \quad -h \leqslant t < \infty, \tag{4.16}$$

d'où en vertu de (4.8)

$$0 \leqslant \lim_{t\to\infty} v(t) \leqslant \lim_{t\to\infty} \psi\big(t; 0, y(t)\big) = 0. \tag{4.17}$$

Il résulte de (4.17) et (4.14) que $V\big(t, x\big(t, \psi(\cdot)\big)\big)$ tend vers zéro pour $t \to \infty$ uniformément par rapport à $\psi(\cdot)$. La stabilité asymptotique de la solution $x = 0$ de (4.1) s'ensuit d'après la remarque 1.

5. Remarque 4. Le théorème T permet de remplacer dans l'exemple 1 la condition sur le signe des $\operatorname{Re} s_k$ par l'inégalité

$$a + be^{-ah} < 0 \quad \text{pour} \quad h > 0 \text{ et } b > 0, \tag{5.1}$$

qui est plus facile à vérifier.

Dans le cas envisagé, l'équation (4.6) est de la forme $v' = 2av$ et par suite

$$\psi(t; 0, v) = v \exp 2at,$$

$$\psi(0; t, v) = v \exp(-2at),$$

$$\psi_v(0; t, v) = \exp(-2at) > 0,$$

$$r(t, u, v) = 2b\sqrt{u}\sqrt{v} \quad \text{pour} \quad u > 0 \text{ et } v > 0,$$

$$g(t, y) = 2by\exp(-ah),$$
$$y' = y2b\exp(-ah),$$
$$y(t) = y(0)\exp\big(t2b\exp(-ah)\big),$$
$$\psi\big(t; 0, y(t)\big) = y(0)\exp\Big(t2\big(a+b\exp(-ah)\big)\Big);$$

on a par conséquent, en vertu de (5.1), $\lim\limits_{t\to\infty}\psi\big(t; 0, y(t)\big) = 0$ uniformément pour $|y(0)| \leqslant R$ (pour un $R > 0$ quelconque). Les hypothèses (H_1)-(H_3) du théorème T sont donc vérifiées.

6. Exemple 2. Il est facile de vérifier que les hypothèses (H_1)-(H_3) du théorème T sont satisfaites aussi dans le cas où la fonction V est assujettie aux hypothèses $\overline{\mathrm{H}}$ suivantes:

$$(\overline{\mathrm{H}}_1)\quad \frac{dV}{dt_{(4.1)}} \leqslant a(t)V\big(t, x(t)\big) + r\Big(t, V\big(t, x(t)\big)\Big),\ V\big(t-h, x(t-h)\big)$$

où

$$r\Big(t, v, v\exp\int\limits_t^{t-h} a(s)ds\Big) \leqslant b(t)v \quad \text{et} \quad \int\limits_0^{+\infty}[a(s)+b(s)]ds = -\infty.$$

$(\overline{\mathrm{H}}_2)$ La fonction $f(t, x, y)$ est de classe C^1 pour $t \geqslant -h$ et

$$f(t, 0, 0) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad t \geqslant -h.$$

On a donc le suivant

THÉORÈME T. *Les hypothèses* $(\overline{\mathrm{H}}_1)$ *et* $(\overline{\mathrm{H}}_2)$ *étant satisfaites, la solution* $x = 0$ *de* (4.1) *est asymptotiquement stable au sens de Liapounoff.*

TRAVAUX CITÉS

[1] R. Bellman, *On the existence and boundedness of non-linear differential-difference equation*, Annals of Mathematics 50 (1949), p. 347-355.

[2] Л. Э. Эльсголц, *Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений*, Успехи математических наук 9 (1954), выпуск 4 (62), p. 95-112.

[3] Н. Н. Красовский, *Обращение теорем второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости движения по первому приближению*, Прикладная Математика и Механика 20(1956), выпуск 2, p. 255-265.

Reçu par la Rédaction le 11. 11. 1965