COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVIII DÉDIÉ À M. TADEUSZ WAŻEWSKI 1967

SUR LA CONTINUITÉ DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE FONCTIONNELLE EN FONCTION D'UN PARAMÈTRE

PAR

K. ZIMA (KATOWICE)

Soit $\delta(t,\lambda)$ une fonction continue dans l'ensemble $\Delta = \{(t,\lambda)\colon t\in\langle 0,a\rangle,\ \lambda\in\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle\}$ et satisfaisant à l'inégalité $\delta(t,\lambda)\leqslant t$ pour $(t,\lambda)\in\Delta$. Posons $p = \min\limits_{(t,\lambda)\in\Delta}\{\delta(t,\lambda)\}$.

Considérons le problème de Cauchy

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f\big(t, x(\delta(t,\lambda))\big) &&\text{pour}\quad t\in\langle 0,a\rangle,\\
x(t) &= \varphi(t) &&\text{pour}\quad t\in\langle p,0\rangle,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

en admettant que les fonctions $\varphi(t)$ et $f(t,x)$ ont les propriétés suivantes:

1. La fonction $\varphi(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle p,0\rangle$.

2. La fonction $f(t,x)$ est continue dans l'ensemble $D = \{(t,x)\colon t\in\langle 0,a\rangle,\ x \text{ quelconque}\}$.

3. Il existe une fonction $\sigma(t,u)$ définie dans l'ensemble $D = \{(t,u)\colon t\in\langle 0,a\rangle,\ u\geqslant 0\}$

(i) non négative et continue dans D, non décroissante par rapport à la variable u, telle que

(ii) le problème de Cauchy $u'(t) = \sigma\big(t,u(t)\big)$, $u(0) = u_0\geqslant 0$ admet une solution définie dans l'intervalle $\langle 0,a\rangle$ tout entier et assujettie à l'inégalité

(iii) $|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{\bar{x}})|\leqslant\sigma(t,|\bar{x}-\bar{\bar{x}}|)$ pour tout couple des points $(t,\bar{x})$, $(t,\bar{\bar{x}})\in D$.

Solution du problème (1) dans l'intervalle $\langle 0,a\rangle$ est à entendre comme fonction $x(t)$ quelconque, continue dans l'intervalle $\langle p,a\rangle$, coïncidant pour $t\in\langle p,0\rangle$ avec la fonction $\varphi(t)$ et satisfaisant pour $t\in\langle 0,a\rangle$ à la première condition du problème (1).

Les hypothèses qui viennent d'être admises assurent l'existence d'une solution de (1) dans l'intervalle $\langle 0,a\rangle$ pour tout λ de l'intervalle

$\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$. Des théorèmes sur l'existence des solutions des problèmes analogues à (1) ont été établis, en autres, dans les travaux [1], [2], [3] et [5].

Je me propose de démontrer deux théorèmes sur le problème (1).

THÉORÈME 1. *Lorsque les fonctions $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, sont des solutions du problème* (1) *dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ pour les valeurs λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, du paramètre λ et que $\lambda_0 = \lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i$, il existe une suite partielle $\{x_{\nu_i}(t)\}$ de $\{x_i(t)\}$ uniformément convergente dans l'intervalle $\langle p, a\rangle$ vers une fonction $x_0(t)$ qui est une solution du problème* (1) *pour $\lambda = \lambda_0$.*

Démonstration. Commençons par montrer que, sous les hypothèses admises, la suite des solutions $\{x_i(t)\}$ est uniformément bornée dans l'intervalle $\langle p, a\rangle$. En effet, en vertu de la définition des fonctions $x_i(t)$ on a la suite d'égalités

$$x_i(t) = \begin{cases} \varphi(0) + \int\limits_0^t f\big(s, x_i(\delta(s, \lambda_i))\big)\,ds & \text{où} \quad t \in \langle 0, a\rangle, \\ \varphi(t) \quad \text{où} \quad t \in \langle p, 0\rangle & \text{et } i = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

qui entraînent les inégalités

$$\begin{aligned} |x_i(t) - x_1(t)| &\leqslant \int\limits_0^t \Big|f\big(s, x_i(\delta(s, \lambda_i))\big) - f\big(s, x_1(\delta(s, \lambda_1))\big)\Big|\,ds \\ &\leqslant \int\limits_0^t \Big|f\big(s, x_i(\delta(s, \lambda_i))\big) - f\big(s, x_1(\delta(s, \lambda_i))\big)\Big|\,ds + \\ &\quad + \int\limits_0^t \Big|f\big(s, x_1(\delta(s, \lambda_i))\big) - f\big(s, x_1(\delta(s, \lambda_1))\big)\Big|\,ds. \end{aligned} \tag{3}$$

Introduisons les notations

$$\begin{aligned} u_i(t) &= \max_{s\leqslant t} |x_i(s) - x_1(s)|, \\ \mu(\lambda_i) &= \int\limits_0^a \Big|f\big(s, x_1(\delta(s, \lambda_i))\big) - f\big(s, x_1(\delta(s, \lambda_1))\big)\Big|\,ds. \end{aligned} \tag{4}$$

En tenant compte de (3) et de 3(i) et de 3(ii) on a donc l'inégalité suivante:

$$u_i(t) \leqslant \mu(\lambda_i) + \int\limits_0^t \sigma\big(s, u_i(s)\big)\,ds \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle \text{ et } i = 2, 3, \ldots \tag{5}$$

L'ensemble Δ étant fermé et les fonctions $\delta(t, \lambda)$, $x_1(t)$ et $f(t, x)$ étant continues, la suite $\{\mu(\lambda_i)\}$ est bornée. Il existe donc une constante

$M > 0$ telle que $\mu(\lambda_i) \leqslant M$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Avec l'inégalité (5), cela entraîne l'inégalité intégrale

$$(6) \qquad u_i(t) \leqslant M + \int_0^t \sigma\big(s, u_i(s)\big) ds \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a \rangle \text{ et } i = 2, 3, \ldots$$

En vertu d'un théorème d'Opial sur les inégalités intégrales (voir [4]), l'inégalité (6) entraîne

$$(7) \qquad u_i(t) \leqslant w(t) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a \rangle \text{ et } i = 2, 3, \ldots,$$

où $w(t)$ est l'intégrale supérieure à droite de l'équation $u' = \sigma(t, u)$ avec la condition initiale $u(0) = M$.

En vertu de l'hypothèse 3 (ii), la fonction $w(t)$ est définie dans tout l'intervalle $\langle 0, a \rangle$. Comme $x_i(t) = \varphi(t)$ pour $t \in \langle p, 0 \rangle$ et $i = 1, 2, \ldots,$ tandis que l'estimation (7) ne dépend pas de l'indice i, les fonctions de la suite $\{x_i(t)\}$ sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle p, a \rangle$.

La fonction $f(t, x)$ étant continue par hypothèse et les solutions $x_i(t)$ étant uniformément bornées, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$(8) \qquad \Big| f\Big(t, x_i\big(\delta(t, \lambda_i)\big)\Big)\Big| < K \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a \rangle \text{ et } i = 1, 2, \ldots$$

L'inégalité (8) et la définition des fonctions $x_i(t)$ entraînent que les dérivées de ces fonctions sont uniformément bornées dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$. Les fonctions $x_i(t)$ sont donc équicontinues dans l'intervalle $\langle p, a \rangle$. En vertu du théorème d'Arzelà, la suite $\{x_i(t)\}$ contient une suite partielle $\{x_{\nu(i)}(t)\}$ uniformément convergente dans l'intervalle $\langle p, a \rangle$. Soit

$$x_0(t) = \lim_{i\to\infty} x_{\nu(i)}(t).$$

Passons à montrer que la fonction $x_0(t)$ est une solution du problème (1) dans l'intervalle $\langle 0, a \rangle$ pour $\lambda = \lambda_0$.

Il est évident que $x_0(t) = \varphi(t)$ pour $t \in \langle p, 0 \rangle$. Il suffit donc d'établir l'identité

$$(9) \qquad x_0(t) - \Big\{\varphi(0) + \int_0^t f\Big(s, x_0\big(\delta(s, \lambda_0)\big)\Big) ds\Big\} \equiv 0 \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a \rangle.$$

Cette identité se déduit aisément de l'inégalité

$$(10) \qquad \Big| x_0(t) - \Big\{\varphi(0) + \int_0^t f\Big(s, x_0\big(\delta(s, \lambda_0)\big)\Big) ds\Big\}\Big|$$
$$\leqslant |x_0(t) - x_{\nu(i)}(t)| + \int_0^a \Big| f\Big(s, x_{\nu(i)}\big(\delta(s, \lambda_{\nu(i)})\big)\Big) - f\Big(s, x_0\big(\delta(s, \lambda_{\nu(i)})\big)\Big)\Big| ds +$$
$$+ \int_0^a \Big| f\Big(s, x_0\big(\delta(s, \lambda_{\nu(i)})\big)\Big) - f\Big(s, x_0\big(\delta(s, \lambda_0)\big)\Big)\Big| ds,$$

dans laquelle le membre droit converge uniformément vers zéro lorsque $\nu(i) \to \infty$ et le membre gauche ne dépend pas de $\nu(i)$. L'identité (9) est ainsi établie, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Si les hypothèses du théorème* 1 *sur le problème* (1) *sont vérifiées et en outre l'hypothèse*

L'intégrale unique de l'équation $u' = \sigma(t, u)$ dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ avec la condition $u(0) = 0$ est la fonction $u(t) \equiv 0$

l'est aussi, alors la suite des solutions $\{x_i(t)\}$ dont il est question dans le théorème 1 *converge uniformément vers la solution $x_0(t)$ de* (1) *pour $\lambda = \lambda_0$.*

Démonstration. En vertu du théorème 1, la suite $\{x_i(t)\}$ contient une suite partielle uniformément convergente vers une solution $x_0(t)$ de (1), à savoir vers celle pour la valeur

$$\lambda_0 = \lim_{i\to\infty} \lambda_i$$

du paramètre λ. En évaluant la différence $|x_i(t) - x_0(t)|$, on obtient d'une manière analogue à (3) et (4) l'inégalité

$$v_i(t) \leqslant \varrho(\lambda_i) + \int_0^t \sigma\big(s, v_i(s)\big) ds \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle \text{ et } i = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

où

$$v_i(t) = \max_{s \leqslant t} |x_i(s) - x_0(s)|,$$

$$\varrho(\lambda) = \int_0^a \Big| f\Big(s, x_0\big(\delta(s, \lambda_i)\big)\Big) - f\Big(s, x_0\big(\delta(s, \lambda_0)\big)\Big)\Big| ds.$$

L'inégalité (11) entraîne

$$v_i(t) \leqslant w\big(t; \varrho(\lambda_i)\big), \tag{12}$$

où $w\big(t; \varrho(\lambda_i)\big)$ est l'intégrale supérieure à droite de l'équation $z' = \sigma(t, z)$ avec la condition initiale $z(0) = \varrho(\lambda_i)$. Comme $\varrho(\lambda_i) \to 0$ lorsque $i \to \infty$ et en vertu des hypothèses 3 (i), (ii) et (iii), la suite des intégrales $w_i(t) = w_i\big(t; \varrho(\lambda_i)\big)$ converge uniformément vers zéro dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. En tenant compte de l'inégalité (12), on en tire la thèse du théorème 2.

Les théorèmes 1 et 2 permettent de trouver une solution approchée de certaines équations différentielles. Il est ainsi surtout dans le cas où $\delta(t, \lambda_i) < t$ pour $\lambda_i \neq \lambda_0$ dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$, puisque la solution $x(t; \lambda_i)$ du problème (1) pour $\lambda = \lambda_i$ peut alors être déterminée effectivement par intégrations successives (méthode des pas). Si l'on choisit convenablement la fonction $\sigma(t, u)$, ce qui rétrécit évidemment la classe des fonctions $f(t, x)$, l'inégalité (12) exprimera effectivement, en fonction de $|\lambda_i - \lambda_0|$, le degré de précision de l'approximation. Pour le montrer, considérons l'exemple fort simple qui suit.

Exemple. Admettons que la fonction $\delta(t, \lambda)$ qui intervient dans une équation de la forme (1) est $\delta(t, \lambda) = t-\lambda$ pour $t \in \langle 0, a\rangle$ et $\lambda \in \langle 0, \Lambda\rangle$ et que $\varphi(t) = k$. Posons encore $\sigma(t, u) = Lu$ où $L > 0$.

Le problème (1) prend dans ce cas la forme

$$(1^*) \qquad \begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t-\lambda)\big) && \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle, \\ x(t) &= k && \text{pour} \quad t \in \langle -\Lambda, 0\rangle. \end{aligned}$$

Comme $t-\lambda < t$ pour $\lambda > 0$, la solution $x(t, \lambda)$ pour $\lambda > 0$ peut être déterminée effectivement par la méthode des pas. Désignons par $x_0(t)$ la solution du problème (1) pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire celle du problème

$$(1^{**}) \qquad x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle \text{ et } x(0) = k.$$

Evaluons la différence des fonctions $x(t, \lambda)$ et $x_0(t)$ dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. En posant

$$u(t) = \max_{s \leqslant t} |x(s, \lambda) - x_0(s)|,$$

on tire de (11)

$$(13) \qquad u(t) \leqslant \varrho(\lambda) + \int_0^t Lu(s)\,ds \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle,$$

où

$$\varrho(\lambda) = \int_0^a \big|f\big(s, x_0(s-\lambda)\big) - f\big(s, x_0(s)\big)\big|\,ds \leqslant L\int_0^a |x_0(s-\lambda) - x_0(s)|\,ds.$$

Posons

$$T = \{(t, x) \colon t \in \langle 0, a\rangle,\ k - Lt \leqslant x \leqslant k + Lt\}$$

et

$$\tilde{M} = \max_{(t,x)\in T} |f(t, x)|.$$

La fonction $x_0(t)$ satisfait à la condition de Lipschitz avec la constante $\tilde{M}$; il vient donc

$$(14) \qquad \varrho(\lambda) \leqslant aL\tilde{M}\lambda.$$

Moyennant de simples inégalités intégrales les inégalités (13) et (14) entraînent

$$(15) \qquad u(t) \leqslant aL\tilde{M}\lambda e^{Lt},$$

c'est-à-dire

$$\max_{s \leqslant t} |x(s, \lambda) - x_0(s)| \leqslant aL\tilde{M}\lambda e^{Lt}.$$

Remarque. La formule (14) se rapporte à tout l'intervalle $\langle 0, a \rangle$. On peut l'appliquer successivement dans des intervalles d'intégration de longueur λ. Ainsi la formule (15) peut être considérablement améliorée. En effet, on peut montrer facilement que les deux solutions $x(t, \lambda)$ et $x_0(t)$ satisfont à l'inégalité

$$\max_{s \leqslant t} |x(s, \lambda) - x_0(s)| \leqslant L\tilde{M}\lambda^2 e^{Lt}.$$

TRAVAUX CITÉS

[1] A. Bielecki, *Równania różniczkowe i pewne ich uogólnienia*, Warszawa 1961.

[2] J. Błaż und K. Zima, *Über eine Differentialungleichung mit Verzögerung*, Annales Polonici Mathematici 14 (1964), p. 311-319.

[3] P. Dłotko, *O pewnym równaniu różniczkowym z opóźniającym się argumentem*, Zeszyty Naukowe WSP Katowice, Sekcja Matematyki, Nr 4, p. 63-72.

[4] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités intégrales*, Annales Polonici Mathematici 3 (1957), p. 200-209.

[5] K. Zima, *O pewnym układzie równań różniczkowych z opóźnionym argumentem*, Zeszyty Naukowe WSP Katowice, Sekcja Matematyki, Nr 4, p. 55-61.

Reçu par la Rédaction le 31. 8. 1966