COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVIII DÉDIÉ À M. TADEUSZ WAŻEWSKI 1967

QUELQUES REMARQUES SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE MATRICIELLE MULTIPLICATIVE DE CAUCHY

PAR

M. KUCZMA (KATOWICE) ET A. ZAJTZ (KRAKÓW)

Introduction. L'équation fonctionnelle

$$f(xy) = f(x)f(y), \tag{1}$$

où les variables x et y appartiennent à un groupe multiplicatif G de nombres réels ou complexes et la fonction inconnue f prend des valeurs dans l'ensemble des matrices carrées non-singulières d'ordre n (à termes réels ou complexes), est l'une des plus importantes (1). Elle exprime l'homomorphie du groupe G dans le groupe linéaire $GL(n, R)$ ou $GL(n, C)$.

Malgré l'importance de l'équation (1), la solution générale (sans hypothèses suplémentaires de régularité) en est inconnue. On est parvenu à la résoudre sous des hypothéses de régularité très faibles, par exemple, sous celle de mesurabilité de la fonction f (voir [9], [3] et [8]), mais la solution générale n'a été trouvée que pour $n \leqslant 3$ (voir [5] et [7]).

Aussi dans le travail présent nous ne donnons la solution de l'équation fonctionnelle que dans le cas particulier, dans lequel le polynôme minimal de la matrice $f(x)$ est identique au polynôme caractéristique de $f(x)$. Nous démontrons en outre que les termes de la matrice $f(x)$ sont les polynômes en les solutions des équations fonctionnelles scalaires

$$\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y), \tag{2}$$

$$\alpha(xy) = \alpha(x) + \alpha(y) \tag{3}$$

et, dans le cas où la fonction $f(x)$ est réelle, en celles du système d'équations

$$\begin{aligned} \varkappa(xy) &= \varkappa(x)\varkappa(y) - \sigma(x)\sigma(y), \\ \sigma(xy) &= \varkappa(x)\sigma(y) + \sigma(x)\varkappa(y). \end{aligned} \tag{4}$$

(1) Voir par exemple Aczél [1], en particulier p. 349-353. Des équations du type (1) trouvent des applications aussi dans la théorie des objets géométriques (voir aussi [2] et [6]).

Les solutions générales des équations (2), (3) et (4) sont bien connues et peuvent être construites à l'aide de la base de Hamel (voir [1]). Les théorèmes qui vont être montrés donnent quelques renseignements sur la structure de solutions non-mesurables de l'équation (1).

La matrice f peut être regardée comme une transformation linéaire dans l'espace vectoriel V^n. Alors sa forme dépend du choix de la base $\mathscr{B}$ dans V^n. Un changement de la base s'exprime par la formule $\tilde{f} = \Gamma^{-1}f\Gamma$ où Γ est une matrice non singulière d'ordre n. Mais $f(x)$ étant une solution de (1), $\tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}f(x)\Gamma$ l'est aussi. On peut donc chercher la solution $f(x)$ de (1) dans une base dans laquelle $f(x)$ est d'une forme particulièrement simple, la solution générale $\tilde{f}(x)$ étant alors donnée par la formule $\tilde{f}(x) = \Gamma^{-1}f(x)\Gamma$ (où la matrice Γ joue le rôle d'un paramètre).

Dans ce qui suit, nous envisageons séparément le cas où la fonction f est complexe et celui où elle est réelle.

Cas complexe. Soit

$$f\colon G \to GL(n, C)$$

une fonction d'argument scalaire et ayant ses valeurs dans un groupe $GL(n, C)$ de matrices carrées non-singulières d'ordre n aux éléments complexes. Admettons aussi que f satisfait à l'équation (1) pour tous les $x, y \in G$.

LEMME 1. *Les racines caractéristiques de la matrice $f(x)$ sont des fonctions multiplicatives de x.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que les racines en question satisfont à l'équation (2). Il résulte de (1) que les matrices $f(x)$ et $f(y)$ sont permutables pour tous les $x, y \in G$. La famille $\big(f(x)\big)_{x\in G}$ se compose donc de matrices mutuellement permutables et il existe une base dans laquelle tous les matrices de cette famille sont de forme triangulaire, à savoir

$$f(x) = \begin{bmatrix} \lambda_1(x) & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2(x) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(x) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

où les termes au-dessus de la diagonale sont des fonctions de x (voir [10]). Les fonctions $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ sont les racines caractéristiques de la matrice $f(x)$. En substituant les valeurs (5) dans (1) on voit que ces racines satisfont à (2).

LEMME 2. *Il existe une base B dans laquelle $f(x)$ est un tableau diagonal de matrices*

$$f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_p(x)\}, \tag{6}$$

où chaque matrice $f_i(x)$ a une seule racine caractéristique $\lambda_i(x)$ (en général multiple et de multiplicité égale à l'ordre de f_i).

Démonstration. Désignons par $N(x)$ le nombre des racines caractéristiques distinctes de la matrice $f(x)$. On a donc $1 \leqslant N(x) \leqslant n$. Posons $N = \max N(x)$. La fonction $N(x)$ n'admettant que des valeurs entières, il existe un $x_0 \in G$ tel que $N(x_0) = N$. On peut trouver une base $\mathscr{B}_1$ dans laquelle $f(x_0)$ est de la forme d'un tableau diagonal de matrices de Jordan

$$f(x_0) = \{f_1, \ldots, f_N\}, \tag{7}$$

où f_i est la composition de tous les matrices de Jordan avec la même racine caractéristique. La permutabilité de $f(x_0)$ et $f(x)$ pour tout $x \in G$ entraîne (voir [4]) que $f(x)$ est également de la forme d'un tableau diagonal de matrices

$$f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}, \tag{8}$$

où $f_i(x)$ peuvent ne plus être des matrices de Jordan, mais l'ordre de $f_i(x)$ reste égal à celui de f_i dans (7).

Il peut arriver que la matrice $f_i(x)$ a des racines caractéristiques distinctes. Désignons par $N_i(x)$ leur nombre et posons $N_i = \max N_i(x)$. Il y a un x_i tel que $N_i(x) = N_i$. La matrice f_i dans (7) correspond à un sous-espace $\mathscr{E}_i$ de l'espace V^n et la dimension de $\mathscr{E}_i$ est égale à l'ordre de f_i. En remplaçant les vecteurs de la base $\mathscr{B}_1$ qui déterminent le sous-espace $\mathscr{E}_1$, on forme une nouvelle base dans laquelle la forme (7) de la matrice $f(x)$ et par conséquent aussi la forme (8) de la matrice $f(x)$ (mais pas la matrice $f_i(x)$ elle-même) reste inchangée. Ainsi, nous pouvons choisir dans tout sous-espace $\mathscr{E}_i$ de V^n une base dans laquelle $f_i(x)$ est de la forme d'un tableau diagonal de matrices,

$$f_i(x) = \{f_{i1}(x), \ldots, f_{iN_i}(x)\},$$

et obtenir de cette manière une base $\mathscr{B}_2$ dans laquelle $f(x)$ est de la forme d'un tableau diagonal:

$$f(x) = \{f_{11}(x), \ldots, f_{1N_1}(x), \ldots, f_{N1}(x), \ldots, f_{NN_N}(x)\}.$$

L'itération de ce procédé doit ce terminer après un nombre fini de pas. On arrive ainsi à une représentation de la forme (6), ou chaque matrice $f_i(x)$ n'a qu'une seule racine caractéristique.

En substituant la valeur (6) dans (1) il vient $f_i(xy) = f_i(x)f_i(y)$ pour $i = 1, \ldots, p$. Chacune des matrices $f_i(x)$ satisfait donc à l'équation (1). Aussi, elle peut être déterminée indépendamment des autres.

C'est pourquoi nous pouvons admettre désormais que $f(x)$ a une seule racine caractéristique $\lambda(x)$.

Dans le lemme qui suit sur de telles fonctions-matrices, il est commode de désigner l'ordre de la matrice $f(x)$ par $m+1$.

LEMME 3. *Il existe une base dans laquelle la matrice $f(x)$ est de la forme $f(x) = \lambda(x)g(x)$, où $\lambda(x)$ est une fonction scalaire multiplicative (la racine caractéristique de $f(x)$) et $g(x)$ est une matrice triangulaire*

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 & a_{01}(x) & \dots & a_{0m}(x) \\ 0 & 1 & \dots & a_{1m}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

dont les éléments $a_{ij}(x)$, où $i < j$, sont des polynômes en fonctions $a_{\mu\nu}(x)$, satisfaisant à l'équation (3).

Démonstration. La matrice $f(x)$ étant non-singulière, sa racine charactéristique $\lambda(x)$ ne s'annule pour aucun $x \in G$. En vertu du lemme 1, $\lambda(x)$ satisfait à l'équation (2). La fonction

$$g(x) = \frac{1}{\lambda(x)} f(x) \tag{10}$$

(aux valeurs dans $GL(m+1, C)$) satisfait donc à l'équation (1).

De plus, $g(x)$ ayant une seule racine caractéristique égale à 1, nous pouvont trouver, de même que dans la démonstration du lemme 1, une base dans laquelle $g(x)$ est de la forme (9).

L'unique racine caractéristique de la fonction $g(x)$ étant positive, cette fonction peut être écrite (voir [4]) sous la forme

$$g(x) = \exp b(x). \tag{11}$$

Or $g(x)$ satisfaisant à (1) et les matrices $g(x)$ et $g(y)$ étant permutables, la fonction-matrice $b(x)$ satisfait à l'équation

$$b(xy) = b(x) + b(y) \tag{12}$$

et ses termes $a_{\mu\nu}(x)$ satisfont par conséquent à l'équation scalaire (3). De plus, les matrices $b(x)$ et $b(y)$ sont permutables pour tous $x, y \in G$.

La matrice $g(x) - E$ (ou E est la matrice-unité d'ordre $m+1$) a les zéros sur la diagonal et au-dessous d'elle; elle est donc nilpotente d'ordre $m+1$ au plus (²). On a ainsi en vertu de (11)

$$b(x) = \log g(x) = \big(g(x) - E\big) - \frac{1}{2}\big(g(x) - E\big)^2 + \dots + \frac{(-1)^{m+1}}{m}\big(g(x) - E\big)^m,$$

les autres termes du développement étant égaux à zéro. La matrice $b(x)$ en tant qu'une somme de matrices nilpotentes, est elle-même nilpotente d'ordre $m+1$ au plus. Il s'ensuit que

$$g(x) = E + b(x) + \frac{1}{2!} b^2(x) + \dots + \frac{1}{m!} b^m(x). \tag{13}$$

(²) Une matrice M est dite *nilpotente d'ordre k* lorsque $M^k = [0]$, mais $M^j \neq [0]$ pour $j < k$.

Les termes de la matrice $g(x)$ sont donc des polynômes en termes de ceux de $b(x)$, ce qui achève la démonstration.

Les lemmes 1-3 entraînent le théorème qui suit.

THÉORÈME 1. *Pour toute solution $f(x)$ de l'équation* (1) *aux valeurs dans $GL(n, C)$, il existe une base dans laquelle $f(x)$ est un tableau diagonal de matrices* (6) *de la forme*

$$f_i(x) = \lambda_i(x) g_i(x), \tag{14}$$

où $\lambda_i(x)$ sont des fonctions multiplicatives scalaires et $g_i(x)$ sont des matrices triangulaires de la forme (9) *et dont les termes sont des polynômes en solutions de l'équation* (3).

Remarque. Le théorème 1 ne donne pas la solution générale de l'équation (1). Bien que toute solution de (1) doive être de la forme décrite dans l'énonceé du théorème 1, pour qu'une fonction $g(x)$ donnée par (13), où $b(x)$ satisfait à l'équation (12), fait une solution de (1), il faut et il suffit que les matrices $b(x)$ et $b(y)$ soient permutables pour tous les $x, y \in G$. Ce n'est qu'alors que la fonction (11) (avec la fonction-matrice $b(x)$ satisfaisant à (12)) satisfait à l'équation (1).

Le problème se réduit donc au suivant: trouver toutes les solutions de l'équation fonctionnelle matricielle (12), telles que les matrices $b(x)$ et $b(y)$ soient permutables pour tous les $x, y \in G$. Ce problème se rattache à celui plus général de determiner toutes les familles de matrices permutables et qui est très difficile. Une solution en permettrait aussi tôt de trouver la solution générale de l'équation (1).

Un cas particulier. Vu le lemme 2 on peut admettre que $f(x)$ a une seule racine caractéristique $\lambda(x)$. Désignons, comme dans le lemme 3, l'ordre de la matrice $f(x)$ par $m+1$ et le dégré du polynôme minimal de la matrice $f(x)$ par $M(x)$. Posons $M = \min M(x)$ et examinons le cas où $M = m+1$, c'est-à-dire dans lequel la valeur de M est maximale, où en d'autres termes, dans lequel le polynôme minimal de la matrice $f(x)$ est identique au polynôme caractéristique de $f(x)$. On peut donner dans ce cas particulier une forme explicite à la fonction $f(x)$.

En effet, en admettant que $M = m+1$, il existe un x_0 tel que $f(x_0)$ a un seul diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda(x_0))^{m+1}$. La matrice $g(x)$ a donc (voir [10]) un seul diviseur élémentaire $(\lambda - 1)^{m+1}$ et il existe par conséquent une base dans laquelle $g(x_0)$ est de la forme canonique:

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . 1 & \dots & . \\ . & . & . & \dots & 0 \\ . & . & . & . 1 & 1 \\ 0 & . & . & . 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Par suite de la permutabilité de $g(x_0)$ et $g(x)$, la fonction $g(x)$ doit être de la forme (voir [4])

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_m(x) \\ 0 & 1 & a_1(x) & \dots & a_{m-1}(x) \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_1(x) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $b(x)$, également permutable avec $g(x)$ en tant qu'un polynôme en $g(x)$, doit donc être de la forme

$$b(x) = \begin{bmatrix} 0 & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_m(x) \\ 0 & 0 & a_1(x) & \dots & a_{m-1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

où les termes $a_i(x)$ sont des solutions de l'équation scalaire (3).

Designons par $D_i = d_{jk}^{(i)}$ $(i = 0, \dots, m)$ la matrice

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot & 0 \\ & & & & \cdot & & 1 \\ & & & & & \cdot & 0 \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

dans laquelle

$$d_{jk}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque} \quad k-j = i, \\ 0 & \text{lorsque} \quad k-j \neq i. \end{cases}$$

En particulier, $D_0 = E$ est la matrice-unité. Les matrices D_i sont permutables et on a

$$D_i D_j = \begin{cases} D_{i+j} & \text{lorsque} \quad i+j \leqslant m, \\ [0] & \text{lorsque} \quad i+j > m. \end{cases} \tag{17}$$

A l'aide de matrices D_i les matrices $b(x)$ et $g(x)$ peuvent être écrites brièvement comme il suit:

$$b(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) D_i, \tag{18}$$

$$g(x) = E + \sum_{i=1}^{m} a_i(x) D_i. \tag{19}$$

La formule généralisée de Newton donne, vu (18),

$$[b(x)]^s = \sum_{k_1+\ldots+k_m=s} \frac{s!}{k_1!\ldots k_m!} \big(a_1(x)D_1\big)^{k_1} \ldots \big(a_m(x)D_m\big)^{k_m},$$

d'où en vertu de (17)

$$[b(x)]^s = \sum_{k_1+\ldots+k_m=s} \frac{s!}{k_1!\ldots k_m!} a_1(x)^{k_1} \ldots a_m(x)^{k_m} D_{k_1+2k_2+\ldots+mk_m}, \tag{20}$$

où $D_\varkappa = [0]$ pour $\varkappa > m$. En substituant les valeurs (20) dans (13), il vient

$$g(x) = E + \sum_{s=1}^{m} \sum_{k_1+\ldots+k_m=s} \frac{1}{k_1!\ldots k_m!} a_1(x)^{k_1} \ldots a_m(x)^{k_m} D_{k_1+2k_2+\ldots+mk_m}, \tag{21}$$

car $k_1+2k_2+\ldots+mk_m = j \leqslant m$ entraîne $k_1+k_2+\ldots+k_m \leqslant m$. En rapprochant (21) à (19), on a finalment

$$a_i(x) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=i} \frac{1}{k_1!\ldots k_m!} a_1(x)^{k_1} \ldots a_m(x)^{k_m}.$$

Or les matrices de la forme (15) étant deux à deux permutables, la fonction (21) satisfait à l'équation (1) quelles que soient les fonctions $a_1(x), \ldots, a_m(x)$ satisfaisant à l'équation (3). Nous avons donc le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Lorsque $f(x)$ est une solution de l'équation* (1) *aux valeurs dans $GL(n, C)$ et que le polynôme minimal de $f(x)$ est identique a son polynôme caractéristique, il existe une base dans laquelle $f(x)$ est un tableau diagonal de matrices* (6) *de la forme* (14), *où $\lambda_i(x)$ sont des fonctions multiplicatives scalaires et où $g_i(x)$ sont de la forme* (21) *avec $a_\mu(x)$ satisfaisant à l'équation* (3).

En outre, quelles que soient les solutions $\lambda_i(x)$ de l'équation (2) *et les solutions $a_\mu(x)$ de l'équation* (3), *la fonction-matrice $f(x)$ de la forme en question est une solution de l'équation* (1) *et le polynôme minimal de $f(x)$ coïncide avec son polynôme caractéristique.*

Remarque. Lorsque la fonction $f(x)$ est mesurable, la forme en devient plus simple. Toute solution mesurable de l'équation (3) est de la forme $a(x) = c\log x$, où c est une constante. Par conséquent, les fonctions $a_\mu(x)$ dans (15) sont linéairement dépendantes, ce qui permet de simplifier par un choix convenable d'une base la forme de la matrice $b(x)$ et en conséquence aussi celle de $f(x)$. C'est impossible sans l'hypothèse de mesurabilité. L'équation (3) a toujours m solutions (non-mesurables) linéairement indépendantes.

Cas réel. Soit

$$f\colon G \to GL(n, R)$$

une fonction d'argument scalaire (réel ou complexe) et ayant ses valeurs dans un groupe $GL(n, R)$ de matrices carrées non-singulières d'ordre n à éléments réels. Notre raisonnement sera analogue à celui du cas complexe. C'est pourquoi nous en omettons les détails et nous nous bornons aux résultats finals.

Le lemme 1 est valable aussi dans le cas réel. Mais si la racine $\lambda(x) = \varkappa(x) + i\sigma(x)$ est complexe, les fonctions réelles $\varkappa(x)$ et $\sigma(x)$ satisfont au système d'équations (4), ce qui résulte immédiatement de ce que $\lambda(x)$ satisfait à (2).

Le lemme 2 reste également valable, mais les matrices $f_i(x)$ dans (6) ne sont pas toujours réelles. Si, pour un indice q, la fonction $f_q(x)$ est réelle, toutes les considérations du cas complexe s'appliquent à $f_q(x)$. Si, par contre, la fonction $f_q(x)$ est complexe et $\varkappa(x) + i\sigma(x)$ en est la racine caractéristique, il existe parmi les matrices $f_i(x)$ une matrice $f_{q'}(x)$, d'ordre égal à celui de $f_q(x)$, avec la racine caractéristique $\bar{\lambda}(x) = \varkappa(x) - i\sigma(x)$. Admettons pour simplifier la notation que l'ordre de $f_q(x)$ est $m+1$. Nous pouvons considérer la matrice $f(x) = \{f_q(x), f_{q'}(x)\}$ indépendamment des autres matrices $f_i(x)$. On a pour une pareille matrice le lemme suivant:

LEMME 4. *Il existe une base dans laquelle la matrice $f(x)$ est de la forme $f(x) = \Lambda(x)G(x)$, où $\Lambda(x)$ est un tableau diagonal*

$$\Lambda(x) = \{K(x), \ldots, K(x)\} \tag{22}$$

de matrices

$$K(x) = \begin{bmatrix} \varkappa(x) & \sigma(x) \\ -\sigma(x) & \varkappa(x) \end{bmatrix}$$

et $G(x)$ est une matrice triangulaire d'ordre $2m+2$,

$$G(x) = \begin{bmatrix} E_{(2)} & L_{01}(x) & \ldots & L_{0m}(x) \\ & E_{(2)} & \ldots & L_{1m}(x) \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & E_{(2)} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

avec

$$E_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad L_{\mu\nu}(x) = \begin{bmatrix} \varphi_{\mu\nu}(x) & \psi_{\mu\nu}(x) \\ -\psi_{\mu\nu}(x) & \varphi_{\mu\nu}(x) \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Les fonctions $\varphi_{\mu\nu}(x)$ et $\psi_{\mu\nu}(x)$ sont des polynômes en solutions de l'équation (3).

La démonstration est analogue à celle des lemmes 1 et 3. En particulier, il résulte de la permutabilité des matrices $f(x)$ et $f(y)$ que chacune des matrices $L_{\mu\nu}(x)$ est permutable avec $K(y)$ pour tous les $x, y \in G$, ce qui implique la forme (24) de matrices $L_{\mu\nu}(x)$.

Nous arrivons ainsi au résultat qui suit:

THÉORÈME 3. *Pour toute solution $f(x)$ de l'équation* (1) *aux valeurs dans $GL(n, R)$, il existe une base dans laquelle $f(x)$ est un tableau diagonal de matrices* (6) *de la forme* (14) *ou bien de la forme*

$$f_i(x) = \Lambda_i(x) G_i(x), \tag{25}$$

où $\lambda_i(x)$ sont des fonctions multiplicatives scalaires, $\Lambda_i(x)$ sont des matrices de la forme (22) *avec $\varkappa_i(x)$ et $\sigma_i(x)$ satisfaisant au système* (4), *tandis que $g_i(x)$ et $G_i(x)$ sont des matrices triangulaires (de la forme* (9) *et* (23) *respectivement) et dont les termes sont des polynômes en solutions de l'équation* (3).

Le cas où les polynômes minimal et caractéristique de $f(x)$ coïncident peut être traité également d'une manière analogue. Posons

$$A_\mu(x) = \{L_\mu(x), \ldots, L_\mu(x)\} = \begin{bmatrix} L_\mu(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_\mu(x) \end{bmatrix},$$

où

$$L_\mu(x) = \begin{bmatrix} \alpha_\mu(x) & \beta_\mu(x) \\ -\beta_\mu(x) & \alpha_\mu(x) \end{bmatrix}.$$

Dans le cas en question la matrice $G(x)$ dans (23) doit être de la forme

$$G(x) = E + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+mk_m=j} \frac{1}{k_1! \ldots k_m!} A_1(x)^{k_1} \ldots A_m(x)^{k_m} D_{2j}, \tag{26}$$

où $\alpha_\mu(x)$ et $\beta_\mu(x)$ sont des solutions de l'équation (3) et D_i sont les matrices définies par (16). On a alors le

THÉORÈME 4. *Lorsque $f(x)$ est une solution de l'équation* (1) *aux valeurs dans $GL(n, R)$ et que le polynôme minimal de $f(x)$ est identique à son polynôme caractéristique, il existe une base dans laquelle $f(x)$ est un tableau diagonal de matrices* (6) *de la forme* (14) *ou* (25), *où $\lambda_i(x)$ sont des fonctions multiplicatives scalaires, $\Lambda_i(x)$ sont des matrices de la forme* (22)

avec $\varkappa_i(x)$ *et* $\sigma_i(x)$ *satisfaisant au système* (4), *tandis que* $g_i(x)$ *et* $G_i(x)$ *sont des matrices de la forme* (21) *et* (26) *respectivement avec* $\alpha_\mu(x)$ *et* $\beta_\mu(x)$ *satisfaisant à l'équation* (3). *En outre, quelles que soient les solution* $\lambda_i(x)$ *de l'équation* (2), *les solutions* $\varkappa_i(x)$ *et* $\sigma_i(x)$ *du système* (4) *et les solutions* $\alpha_\mu(x)$ *et* $\beta_\mu(x)$ *de l'équation* (3), *la fonction-matrice* $f(x)$ *de la forme en question est une solution de l'équation* (1) *et le polynôme minimal de* $f(x)$ *coïncide avec son polynôme caractéristique.*

TRAVAUX CITÉS

[1] J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, New York 1965.

[2] — und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[3] D. Z. Djoković, *A theorem on semigroups of linear operators*, Publications de l'Institut Mathématique de Beograd, Nouvelle Série 3 (17) (1963), p. 129-130.

[4] F. R. Gantmacher, *Matrizenrechnung, I*, Berlin 1958.

[5] M. Kucharzewski i M. Kuczma, *Ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego* $f(xy) = f(x)f(y)$ *dla macierzy* f *drugiego stopnia*, Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Katowicach, Sekcja Matematyki, 3 (1962), p. 47-59.

[6] — *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne 43 (1964).

[7] M. Kuczma und A. Zajtz, *Über die multiplikative Cauchysche Funktionalgleichung für Matrizen dritter Ordnung*, Archiv der Mathematik 15 (1964), p. 136-143.

[8] — *On the form of real solutions of the matrix functional equation* $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ *for non-singular matrices* Φ, Publicationes Mathematicae Debrecen 13 (1966), p. 257-262.

[9] S. Kurepa, *Semigroups of linear transformations in n-dimensional vector space*, Glasnik Matematičko-fizički i astronomski 13 (1958), p. 3-32.

[10] В. В. Морозов, *О коммутативных матрицах*, Ученые Записки Казанского Государственного Университета 112 (1952), книга 9.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1966