COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XVII 1967 FASC. 1

UNE CONSTRUCTION DU RÉTICULÉ DISTRIBUTIF LIBRE SUR UN ENSEMBLE ORDONNÉ

PAR

LUIZ MONTEIRO (BAHÍA BLANCA)

L'idée de la construction du réticulé distributif libre sur un ensemble ordonné, présentée dans cette note, fut suggérée par A. Monteiro.

La notion d'isomorphie d'ordre (voir [3], p. 6, et [2], p. 3) se définit de la manière suivante:

1. Définition. Une application f de l'ensemble ordonné (voir [3], p. 1) I sur l'ensemble ordonné I' est une *isomorphie d'ordre* si les conditions suivantes sont vérifiées:

(F1) $x \leqslant y$ entraîne $f(x) \leqslant f(y)$ pour $x, y \in I$.

(F2) $f(x) \leqslant f(y)$ entraîne $x \leqslant y$ pour $x, y \in I$.

(F3) L'application f est biunivoque.

On a l'implication (F2) $\Rightarrow$ (F3). En effet, si $f(x) = f(y)$, alors $f(x) \leqslant \leqslant f(y)$ et $f(y) \leqslant f(x)$, d'où $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, d'après (F2), donc $x = y$.

Dans cette note nous nous bornons à considérer la catégorie des réticulés distributifs ayant un premier et un dernier éléments.

2. Définition. Etant donné un ensemble ordonné I, le réticulé distributif L est dit *libre sur* I si les conditions suivantes sont vérifiées:

(A) Il existe une isomorphie d'ordre, g de I dans L, telle que le réticulé L est engendré par l'ensemble $g(I)$.

(B) Étant donnée une application isotone f de I dans un réticulé distributif D, il existe une homomorphie (voir [6], p. 23), h de L dans D, telle que $h(g(i)) = f(i)$ pour tout $i \in I$.

Cette notion a été introduite par Lorenzen [5] dans le cas plus général des ensembles pré-ordonnés (voir [3], p. 3) (1).

(1) Sur la notion de réticulé libre voir [7] et sur celle de réticulé libre (complètement libre) sur un ensemble ordonné voir [4]. Pour être d'accord avec la terminologie de cet auteur, on devrait appeler *L réticulé distributif complètement libre sur I*.

Il est facile de montrer de la manière habituelle (voir [6], p. 24 et 25) que si L existe, il est unique, à une isomorphie près, et que l'homomorphie h dont il est question dans la condition (B) de la définition 2 est unique.

3. Construction. Soit I un ensemble ordonné. Considérons l'ensemble $E = B^I$ de toutes les applications isotones x de I dans l'ensemble ordonné $B = \{0, 1\}$ où $0 < 1$. Si une application $x \in E$ prend dans chaque point i de I une valeur $x(i) = x_i \in B$, nous dirons que x_i est la *coordonnée d' indice* i du point $x \in E$ et nous écrirons $x = \big((x_i)\big)$. E est en général distinct de la famille 2^{I} de tous les sous-ensembles de I.

Soit $g(i) = G_i$ l'ensemble de tous les éléments $x \in E$ tels que $x_i = 1$. Remarquons que G_i n'est pas vide, quel que soit $i \in I$; en effet, le point e de E défini par l'équation $e(i) = 1$ pour tout $i \in I$, appartient à tous les G_i. Soit L l'anneau d'ensembles engendré (dans 2^E) par $G = \{G^i; i \in I\}$. En particulier, L contient donc l'ensemble E et la partie vide $(\emptyset)$ de E.

4. Démonstration. Il s'agit de montrer que L est le réticulé distributif libre sur l'ensemble ordonné I. Pour montrer que l'application g définie dans la construction vérifie la condition (A) de la définition 2, remarquons que

(A1) *$i \leqslant j$ entraîne $g(i) \subseteq g(j)$ pour $i, j \in I$.*

En effet, si $x \in g(i) = G_i$, on a $x_i = 1$ et il résulte de $i \leqslant j$ que $x_i \leqslant x_j$, donc $x_j = 1$, c'est-à-dire $x \in G_j = g(j)$.

(A2) *$g(i) \subseteq g(j)$ entraîne $i \leqslant j$ pour $i, j \in I$.*

En effet, supposons que $g(i) \subseteq g(j)$ et que i non $\leqslant j$. Soit $x \in E$ l'application définie de la manière suivante:

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad k \geqslant i, \\ 0 & \text{pour} \quad k \text{ non } \geqslant i. \end{cases}$$

Alors $x \in g(i)$ et $x \notin g(j)$, ce qui est impossible par hypothèse. On a donc $i \leqslant j$.

(A3) *Le réticulé L est engendré par $g(I)$.*

En effet, $g(I) = G$ par construction, et G engendre L par la définition de L.

Les conditions (A1)-(A3) montrent que la condition (A) de la définition 2 est vérifiée. Reste à le montrer pour la condition (B). Soit f une application isotone de I dans un réticulé distributif D. Vu le théorème de représentation de Birkhoff (voir [2], p. 140), on peut admettre que D est un anneau T_0 de sous-ensembles d'un certain ensemble T. Posons $f(i) = H_i \subseteq T$. Nous avons à montrer qu'il existe une homomorphie h de L dans D qui vérifie la condition (B). Soit k_i la fonction caractéristique de l'ensemble H_i, à savoir

$$k_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in H_i, \\ 0 & \text{si} \quad t \notin H_i. \end{cases}$$

Il est évident que k_i est une application de T dans B.

Considérons maintenant l'application k définie sur T comme suit:

$$k(t) = \big((k_i(t); i \in I)\big) \quad \text{pour} \quad t \in T.$$

Elle prênd ses valeurs dans E. En effet, pour tout $t \in T$ fixe, $k_i(t)$ est une fonction de $i \in I$. Or si $i \leqslant j$, on a $f(i) = H_i \subseteq H_j = f(j)$, donc $k_i(t) \leqslant k_j(t)$, ce qui montre que $k(t) \in E = B^I$.

Posons $h(X) = k^{-1}(X)$ pour tout sous-ensemble X de E. Il est évident que h est une application de 2^E dans 2^T. Nous allons montrer qu'elle vérifie la condition (B) de la définition 2. Pour cela, remarquons que

(B1) *h est une homomorphie de 2^E dans 2^T.*

En effet, d'une part, X et Y étant des sous-ensembles de E, on a toujours

(1) $\quad h(X \cap Y) = k^{-1}(X \cap Y) = k^{-1}(X) \cap k^{-1}(Y) = h(X) \cap h(Y),$

(2) $\quad h(X \cup Y) = k^{-1}(X \cup Y) = k^{-1}(X) \cup k^{-1}(Y) = h(X) \cup h(Y).$

D'autre part, l'application k étant définie sur T, on a

(3) $$h(\emptyset) = k^{-1}(\emptyset) = \emptyset,$$

(4) $$h(E) = k^{-1}(E) = T.$$

Les conditions (1)-(4) entraînent (B1).

(B2) *$h\big(g(i)\big) = f(i)$ pour tout $i \in I$.*

En effet, on a $h\big(g(i)\big) = h(G_i) = k^{-1}(G_i)$ et $f(i) = H_i$. Reste donc à montrer que $k^{-1}(G_i) = H_i$. Pour cela, il suffit de remarquer que les conditions suivantes sont équivalentes deux à deux:

(5) $$t \in H_i,$$

(6) $$k_i(t) = 1,$$

(7) $$k(t) \in G_i,$$

(8) $$t \in k^{-1}(G_i).$$

L'équivalence (5) $\Longleftrightarrow$ (8) entraîne (B2).

(B3) *h est une application de L dans D.*

Considérons l'ensemble $L' = \{X \subseteq E : h(X) \in D\}$. Remarquons d'abord que

(B3.1) *L' est un anneau de parties de E.*

Étant donné que $h(\emptyset) = \emptyset \in D$ et $h(E) = T \in D$, on a

(9) $$\emptyset \in L',$$

(10) $$E \in L'.$$

En outre,

(11) *On a* $X \cap Y \in L'$ *pour* $X, Y \in L'$.

En effet, D étant un anneau d'ensembles, $h(X)$, $h(Y) \in D$ entraîne $h(X) \cap h(Y) \in D$ et comme $h(X) \cap h(Y) = h(X \cap Y)$ en vertu de (1), il vient $h(X \cap Y) \in D$, donc $X \cap Y \in L'$. D'une façon analogue,

(12) *On a* $X \cup Y \in L'$ *pour* $X, Y \in L'$.

De (9)-(12) il résulte (B3.1). Enfin, $h(G_i) = h\big(g(i)\big) = f(i) \in D$, d'où (B3.2) *On a* $G_i \in L'$ *pour tout* $i \in I$.

L étant le sous-anneau d'ensembles engendré par G, il s'ensuit de (B3.1) et (B3.2) que $L \subseteq L'$. La condition (B3) est ainsi établie.

Les conditions (B1)-(B3) montrent que la condition (B) est vérifiée, ce qui achève la démonstration ([2]).

Dans le cas particulier où l'ordre sur I coïncide avec la relation d'égalité, L est le réticulé distributif libre ayant un ensemble de générateurs libres, dont la puissance est égale à celle de I et la construction 3 coïncide avec une construction connue.

5. Exemple. Soit I l'ensemble ordonné dont le diagramme de Hasse est représenté sur la fig. 1. Dans ce cas, les éléments de E sont

$$(0, 0, 0),\ (1, 0, 0),\ (0, 0, 1),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1) \text{ et } (1, 1, 1),$$

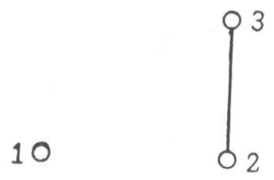

Fig. 1

G est la famille de trois ensembles

$$G_1 = (1, 0, 0),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 1),$$
$$G_2 = (0, 1, 1),\ (1, 1, 1),$$
$$G_3 = (0, 0, 1),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1),\ (1, 1, 1)$$

([2]) Le théorème de Lorenzen [5] sur l'existence de L est ainsi démontré. Pour les algèbres de Boole la démonstration est analogue.

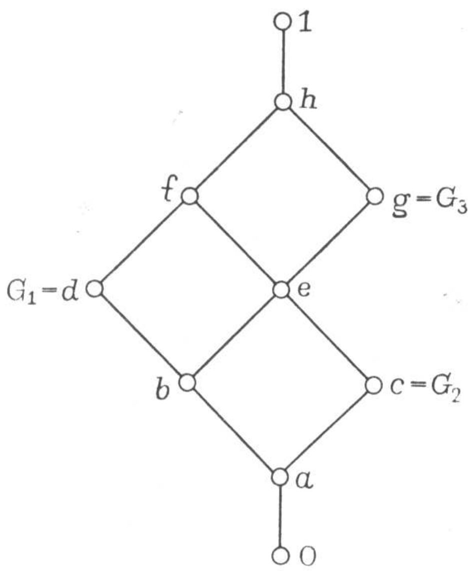

Fig. 2

et le réticulé distributif libre sur I a par conséquent pour éléments

$$0 = \emptyset,\ d = G_1,\ c = G_2,\ g = G_3,\ a = G_1 \cap G_2,\ b = G_1 \cap G_3,$$

$$f = G_1 \cup G_2,\ h = G_1 \cup G_3,\ e = G_2 \cup (G_1 \cap G_3),\ 1 = E.$$

Son diagramme de Hasse est représenté sur la fig. 2.

TRAVAUX CITÉS

[1] G. Birkhoff, *On the combination of subalgebras*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 29 (1933), p. 441-464.

[2] — *Lattice theory*, Revised edition, 1948.

[3] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chapitre III, Paris 1956.

[4] R. P. Dilworth, *Lattices with unique complements*, Transactions of the American Mathematical Society 57 (1945), p. 123-154.

[5] P. Lorenzen, *Algebraische und logistische Untersuchungen über freie Verbände*, Journal of the Symbolic Logic 16 (1951), p. 81-106.

[6] H. Rasiowa and R. Sikorski, *Mathematics of metamathematics*, Monografie Matematyczne 41, Warszawa 1963.

[7] P. Whitman, *Free lattices, I*, Annals of Mathematics 42 (1941), p. 325--330, et *II*, ibidem 43 (1942), p. 104-115.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD NACIONAL
DEL SUR BAHÍA BLANCA (ARGENTINA)

Reçu par la Rédaction le 28. 3. 1964;
en version modifiée le 18. 9. 1965