COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XVI DÉDIÉ À M. FRANCISZEK LEJA 1967

KLASSIFIKATION DER LINEAREN HOMOGENEN GEOMETRISCHEN OBJEKTE, DEREN KOMPONENTENZAHL DIE DIMENSION DES RAUMES NICHT ÜBERTRIFFT

VON

M. KUCHARZEWSKI (KATOWICE) UND A. ZAJTZ (KRAKÓW)

Einleitung. In [6] haben wir alle linearen homogenen geometrischen Objekte vom Typus $(m, n, 1)$ (vgl. [1], S. 15) bestimmt. In dieser Note klassifizieren wir diese Objekte hinsichtlich Äquivalenzrelation ([1], S. 16, und [4], § 8). Mit der Klassifikation der linearen Objekte beschäftigen sich Kuczma [7], Kucharzewski und Kuczma [2], [3], [5] und Zajtz [8]. In [7] wurden alle linearen geometrischen Objekte erster Klasse mit einer Komponente ($m = 1$) im n-dimensionalen Raume X_n und in [2], [3] alle solche Objekte mit zwei Komponenten aber nur im X_2 untersucht. In [5] ist die Klassifikation der sogenannten J-Objekte für $m \leqslant 3$ und in [8] für beliebiges m enthalten.

Da das Klassifikationsproblem für die linearen Objekte vom Typus $(m, n, 1)$ und $m \leqslant n = 2$ bereits in [2], [3] und [7] erledigt ist, werden wir hier diese Objekte nur im Raume der Dimension $n \geqslant 3$ betrachten.

In [5] und [8] wurde die Klassifikation der J-Objekte im wesentlichen für beliebige m und n durchgeführt. Darum ziehen wir hier die J-Objekte nicht in Betracht.

Das Hauptergebnis dieser Note ist im Satz 1.1 enthalten.

Die Methode des Beweises des Hauptsatzes ist von der, die in [2], [3], [5] und [8] benutzt wurde, etwas verschieden. Sie stützt sich nämlich auf die Ergebnisse der Arbeit von Zajtz [9] über die stationären Untergruppen.

§ 1. Hauptergebnis. Aus den Betrachtungen der Arbeit [6] (Satz 3.2 und 4.2) folgt, daß alle linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse, deren Komponentenzahl m nicht größer als die Dimensionszahl n ist, durch folgende drei Transformationsformeln bestimmt sind:

$$\omega' = G(J)\,\omega, \tag{1.1}$$

$$\omega' = \varphi(J)\,CAC^{-1}\omega, \tag{1.2}$$

$$\omega' = \varphi(J)\,C(A^{-1})^T\, C^{-1}\omega. \tag{1.3}$$

In diesen Formeln sind $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^m)$ und $\omega' = (\omega^{1'}, \ldots, \omega^{m'})$ Komponenten des Objektes entsprechend in einem ursprünglichen (ξ^i) und in einem neuen $(\xi^{i'})$, $i = 1, \ldots, n$, Koordinatensystem. $G(\varrho)$ ist eine beliebige Matrixfunktion der Ordnung m einer reellen Veränderlichen, welche die multiplikative Funktionalgleichung

$$G(\varrho)G(\sigma) = G(\varrho\sigma)$$

für alle nichtverschwindenden ϱ und σ und die Beziehung $G(1) = e$ (e Einheitsmatrix der Ordnung n) erfüllt. $\varphi(\varrho)$ ist eine beliebige skalare Funktion, welche die multiplikative Funktionalgleichung

$$\varphi(\varrho)\varphi(\sigma) = \varphi(\varrho\sigma), \qquad \varrho\cdot\sigma \neq 0, \tag{1.4}$$

und die Bedingung

$$\varphi(1) = 1 \tag{1.5}$$

erfüllt. C ist eine beliebige nichtsinguläre Matrix der Ordnung m. Endlich bezeichnet J die Jacobische Determinante $J = \operatorname{Det} A$ der Matrix der ersten partiellen Ableitungen $A = \|\partial\xi^{i'}/\partial\xi^i\|$ der Koordinatentransformation, die von dem Koordinatensystem (ξ^i) zum $(\xi^{i'})$ führt.

Die Objekte mit der Transformationsformel (1.1) sind sogenannte J-Objekte (vgl. [1], S. 47).

Wir werden im weiteren voraussetzen, daß die Funktionen G und φ in (1.1)-(1.3) meßbar sind.

Unter dieser Voraussetzung wurden die J-Objekte (1.1) in [5] und [8] klassifiziert. Darum beschränken wir uns hier nur auf die Klassifikation der Objekte mit den Transformationsformeln (1.2) und (1.3). Überdies zeigen wir noch, daß die J-Objekte mit den Objekten (1.2) bzw. (1.3) für $n > 1$ nicht äquivalent sind.

Es gilt der folgende

HILFSSATZ 1.1. *Die Objekte* (1.2) *und* (1.3) *sind entsprechend mit den Objekten mit nachstehenden Transformationsformeln*

$$\omega' = \varphi(J)A\omega, \tag{1.6}$$

$$\omega' = \varphi(J)(A^{-1})^T\omega. \tag{1.7}$$

stark äquivalent (vgl. [5], S. 8).

Was die Funktion φ betrifft, so hat (1.4), unter der Meßbarkeitsvoraussetzung die allgemeine, der Bedingung (1.5) genügende Lösung einer der folgenden Formen:

$$\varphi(\varrho) = |\varrho|^\mu, \tag{1.8}$$

$$\varphi(\varrho) = (\operatorname{sgn}\varrho)|\varrho|^\mu. \tag{1.9}$$

Wir haben also statt (1.6) und (1.7)

$$\omega' = |J|^{\mu} A\omega, \tag{1.10}$$

$$\omega' = (\mathrm{sgn} J)\,|J|^{\mu} A\omega, \tag{1.11}$$

$$\omega' = |J|^{\mu} (A^{-1})^{T} \omega, \tag{1.12}$$

$$\omega' = (\mathrm{sgn} J)\,|J|^{\mu} (A^{-1})^{T} \omega. \tag{1.13}$$

SATZ 1.1. *Keines der Objekte* (1.10)-(1.13) *im Raume* $X_n (n \geqslant 3)$ *ist mit einem anderen äquivalent. Diese Objekte sind für verschiedene Werte von* μ *auch untereinander nicht äquivalent. Überdies ist keines der Objekte* (1.10)-(1.13) *mit dem J-Objekte* (1.1) *äquivalent.*

Bemerkung 1.1. Den Satz 1.1 beweisen wir für die abstrakten (vgl. [4], S. 24) transitiven (vgl. [4], S. 26) geometrischen Objekte mit der Fiber $R^m_* = R^m - \{0\}$. Daraus folgt aber, daß er auch für diese Objekte mit dem ganzen Raum R^m als Fiber gültig ist.

Dem Beweis werden wir einige einleitende Begriffe vorausschicken.

§ 2. Subobjekt und die stationären Untergruppen. Es sei ω ein abstraktes geometrisches Objekt mit der Transformationsformel

$$\omega' = F(\omega, L), \qquad L \in \mathfrak{G},\ \omega \in \mathfrak{M}, \tag{2.1}$$

und mit der Fiber $\mathfrak{M}$, wobei $\mathfrak{G}$ hier kürzehalber die Gruppe L^r_n (vgl. [4]) bezeichnet. $\overline{\mathfrak{G}}$ sei eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

Definition 2.1. Ein geometrisches Objekt $\overline{\omega}$ mit der Fiber $\mathfrak{M}$ und der Transformationsformel

$$\overline{\omega}' = F(\overline{\omega}, L), \qquad L \in \overline{\mathfrak{G}},\ \overline{\omega} \in \mathfrak{M},$$

nennen wir *Subobjekt* von ω hinsichtlich der Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}$.

Es seien ω und σ die Objekte mit den Transformationsformeln (2.1) und

$$\sigma' = G(\sigma, L), \qquad L \in \mathfrak{G},\ \sigma \in \mathfrak{N}. \tag{2.2}$$

Die Fiber von σ ist $\mathfrak{N}$ und σ hat dieselbe Gruppe $\mathfrak{G}$ wie ω.

Aus der Definition der Äquivalenz (bzw. der starken Äquivalenz, vgl. [4], S. 40, 41) der geometrischen Objekte folgt sofort der

SATZ 2.1. *Sind* ω *und* σ *äquivalent (stark äquivalent), so sind beliebige zwei Subobjekte* $\overline{\omega}$ *und* $\overline{\sigma}$ *dieser Objekte, mit derselben Untergruppe äquivalent (stark äquivalent).*

Definition 2.2. Die Menge aller L aus $\mathfrak{G}$, die den Punkt ω_0 durch die Transformationsformel (2.1) in ω_0 überführen, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Diese Untergruppe wird die *stationäre Untergruppe* des Objektes ω hinsichtlich ω_0 genannt und mit $\mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega)$ bezeichnet.

Es seien die Objekte (2.1) und (2.2) äquivalent. Bezeichnen wir mit

$$\sigma = H(\omega) \tag{2.3}$$

die umkehrbare Funktion, welche diese Äquivalenz bestimmt und entsprechend mit ω_0, $\sigma_0 = H(\omega_0)$ einen Punkt aus $\mathfrak{M}$ und sein Bild in $\mathfrak{N}$. Aus der Definition der Äquivalenz der geometrischen Objekte und aus der Definition 2.2 folgt der

SATZ 2.2. *Die stationären Untergruppen von ω und σ im Punkte ω_0 und σ_0 sind identisch*: $\mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega) = \mathfrak{G}_{\sigma_0}(\sigma)$.

§ 3. Nichtäquivalenz der Objekte (1.10) und (1.11) mit den Objekten (1.12) und (1.13).

HILFSSATZ 3.1. *Keines der Objekte* (1.10) *und* (1.11) *ist mit irgendeinem der Objekte* (1.12) *und* (1.13) *in $X_n (n \geqslant 3)$ mit R_*^m als Fiber äquivalent.*

Beweis. Die Subobjekte ω und σ von (1.10) und (1.11) bzw. (1.12) und (1.13), die der Untergruppe $J = \operatorname{Det} A = 1$ von $L_n^1 = GL(n)$ entsprechen, haben die Transformationsformeln

$$\omega' = A\omega, \quad J = 1, \quad \omega \in \mathfrak{M} = R_*^m, \tag{3.1}$$

bzw.

$$\sigma' = (A^{-1})^T \sigma, \quad J = 1, \quad \sigma \in \mathfrak{N} = R_*^m. \tag{3.2}$$

Wir zeigen, daß (3.1) und (3.2) nicht äquivalent sind. Zum indirekten Beweis nehmen wir an, daß diese Objekte äquivalent sind und daß die Funktion (2.3) diese Äquivalenz bestimmt. Wir setzen

$$\omega_0 = (1, 0, \ldots, 0) \tag{3.3}$$

und

$$\sigma_0 = H(\omega_0). \tag{3.4}$$

Dann ist

$$\sigma_0 \neq (0, \ldots, 0) \text{ (1)}. \tag{3.5}$$

Wegen des Satzes 2.2 hätten wir dann

$$\mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega) = \mathfrak{G}_{\sigma_0}(\sigma). \tag{3.6}$$

Die Matrizen A von $\mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega)$ sind durch

$$A_1^{1'} = 1, \quad A_1^{i'} = 0, \quad i' = 2, \ldots, n, \ \operatorname{Det} A = 1 \tag{3.7}$$

(1) Der Punkt $(0, \ldots, 0)$ ist invariant bezüglich beliebiger Transformation (3.2), wäre also $\sigma_0 = (0, \ldots, 0)$, so wäre auch der Punkt $\omega_0 = H^{-1}(\sigma_0)$ bezüglich der Transformation (3.1) invariant, was offensichtlich nicht gilt.

bestimmt. Jede Matrix A der Gestalt (3.7) muß also wegen (3.6) den Punkt σ_0 mit Hilfe der Transformationsformel (3.2) in sich überführen:

$$\sigma_0 = (A^{-1})^T \sigma_0, \qquad A \in \mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega). \tag{3.8}$$

Bezeichnen wir mit $B = \|B_i^{i'}\|$ die Matrix $(A^{-1})^T$, so gilt

$$B_1^{1'} = 1, \qquad B_i^{1'} = 0, \qquad i = 2, \ldots, n,$$
$$\operatorname{Det}\|B_a^{a'}\| = 1, \qquad a = 2, 3, \ldots, n. \tag{3.9}$$

Aus (3.8) folgt

$$\sigma_0^{a'} = B_k^{a'} \sigma_0^k. \tag{3.10}$$

Da die Elemente $B_k^{a'}$ $(a = 2, \ldots, n; k = 1, \ldots, n)$ nur die Bedingung (3.9) erfüllen, erhält man aus (3.10) für $n \geqslant 3$

$$\sigma_0^a = 0, \qquad a = 2, 3, \ldots, n. \tag{3.11}$$

Daraus und aus (3.10) ergibt sich noch

$$0 = B_1^{2'} \sigma_0^1.$$

Da aber $B_1^{2'}$ ganz beliebig ist, so folgt

$$\sigma_0^1 = 0, \tag{3.12}$$

Die Beziehungen (3.11) und (3.12) widersprechen (3.5), was den Beweis schließt.

Bemerkung 3.1. Die Voraussetzung $n \geqslant 3$ ist wesentlich. Für $n = 2$ sind die Objekte (1.10) (bzw. (1.11) mit (1.12) (bzw. (1.13) mit dem ganzen R^2 als Fiber stark äquivalent (vgl. [2], S. 37, Lemma 6).

§ 4. Nichtäquivalenz der Objekte (1.10) mit (1.11) bzw. (1.12) mit (1.13).

Hilfssatz 4.1. *Die Objekte mit den Transformationsformeln* (1.10) *und* (1.11) *und mit R_*^m als Fiber sind miteinander nicht äquivalent.*

Beweis. Wir nehmen in Betracht die Subobjekte ω und σ von (1.10) und (1.11), die durch die Untergruppe $|J| = 1$ bestimmt sind. Diese haben die Transformationsformeln

$$\omega' = A\omega, \qquad |J| = 1, \omega \in R_*^m \tag{4.1}$$
$$\sigma' = (\operatorname{sgn} J) A\sigma, \qquad |J| = 1, \sigma \in R_*^m. \tag{4.2}$$

Wir zeigen, daß (4.1) und (4.2) nicht äquivalent sind. Wir setzen das Gegenteil voraus und bezeichnen mit H die Funktion (2.3), die diese Äquivalenz bestimmt. Wir erklären wieder ω_0 und σ_0 durch (3.3), (3.4). Die stationäre Untergruppe $\mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega)$ für (4.1) ist durch

$$A_1^{1'} = 1, \qquad A_1^{i'} = 0, \qquad i' = 2, \ldots, n, \qquad |J| = 1,$$

bestimmt. Jede Matrix A, die dieser Bedingung genügt, muß σ_0 mit Hilfe von (4.2) in sich überführen, also

$$\sigma_0 = (\operatorname{sgn} J) A \sigma_0, \qquad A \in \mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega). \tag{4.3}$$

Daraus folgt, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, daß

$$\sigma_0^a = 0, \qquad a = 2, \ldots, n.$$

Setzt man in (4.3) für A eine Matrix mit negativer Determinante $J = \operatorname{Det} A < 0$ ein, so erhält man $\sigma_0^1 = -\sigma_0^1$ und daher $\sigma_0^1 = 0$. Es gilt also $\sigma_0^i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, was im Widerspruch zu (3.5) steht.

Die Nichtäquivalenz der Objekte (1.12) mit (1.13) kann ganz analog bewiesen werden. Es gilt

HILFSSATZ 4.2. *Die Objekte mit den Transformationsformeln* (1.12) *und* (1.13) *mit* R_*^m *als Fiber sind untereinander nicht äquivalent.*

§ 5. Nichtäquivalenz der Objekte (1.10)-(1.13) für verschiedene Werte von μ.

HILFSSATZ 5.1. *Die Objekte* (1.10) (*bzw.* (1.11)) *mit* R_*^m *als Fiber sind für verschiedene Werte* μ *für* $n \geqslant 2$ *miteinander nicht äquivalent.*

Beweis. Die Subobjekte ω, σ von (1.10) bzw. (1.11), die der Untergruppe $J > 0$ entsprechen, haben für μ und ν ($\mu \neq \nu$) folgende Transformationsformeln:

$$\omega' = J^\mu A \omega, \qquad J > 0, \ \omega \in R_*^m, \tag{5.1}$$

$$\sigma' = J^\nu A \sigma, \qquad J > 0, \ \sigma \in R_*^m. \tag{5.2}$$

Die stationäre Untergruppe $\mathfrak{G}_{\omega_0}(\omega)$ von ω im Punkte ω_0, der durch (3.3) erklärt ist, hat die Form

$$|A_1^{1'}|^{\mu+1} D^\mu = 1, \qquad A_1^{2'} = \ldots = A_1^{n'} = 0, \tag{5.3}$$

$$A_1^{1'} > 0, \qquad D > 0, \tag{5.4}$$

wo D das algebraische Komplement von $A_1^{1'}$ in der Determinante J ist.

Wären (5.1) und (5.2) äquivalent, so müßte jede Matrix A, die den Bedingungen (5.3) und (5.4) genügt, σ_0 mit Hilfe der Formel (5.2) unverändert lassen (da die ω_0 unverändert läßt und $\sigma_0 = H(\omega_0)$ ist)

$$\sigma_0 = J^\nu A \sigma_0. \tag{5.5}$$

Da $\|A_\beta^{\alpha'}\|$ wegen (5.4) nur die Bedingung $D = \operatorname{Det}\|A_\beta^{k'}\| > 0$ erfüllt, folgt aus (5.5), für $n \geqslant 2$, daß

$$\sigma_0^a = 0, \qquad a = 2, \ldots, n, \tag{5.6}$$

ist. Setzt man (5.6) in (5.5), so erhält man

$$\sigma_0^1 = J^\nu A_1^{1'} \sigma_0^1. \tag{5.7}$$

Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Ist $\mu \neq -1$, so erhalten wir aus (5.7) mit Hilfe von (5.3)

$$\sigma_0^1 = D^{-(\mu+\nu)/(\mu+\nu)}\sigma_0^1.$$

Da $D > 0$ ist, erhält man daraus

$$\sigma_0^1 = 0. \tag{5.8}$$

2. Ist dagegen $\mu = -1$, so schließen wir aus (5.3) und (5.4), daß

$$D = 1, \quad A_1^{1'} > 0.$$

(5.7) nimmt in diesem Fall die Form

$$\sigma_0^1 = (A_1^{1'})^{\nu+1}\sigma_0^1, \quad A_1^{1'} > 0.$$

Daraus folgt (5.8) auch für $\mu = -1$. Wir sehen also, daß σ_0 jedenfalls gleich Null ist. Das widerspricht aber (3.5) und der Beweis ist beendet.

Ganz analog kann man die Nichtäquivalenz der Objekte (1.12) bzw. (1.13) beweisen. Es genügt nur die Matrix A durch $B = (A^{-1})^T$ zu ersetzen.

HILFSSATZ 5.2. *Die Objekte* (1.12) (*bzw.* (1.13)) *mit* R_*^m *als Fiber sind für verschiedene Werte* μ *für* $n \geqslant 2$ *miteinander nicht äquivalent.*

§ 6. Nichtäquivalenz der Objekte (1.10)-(1.13) mit den J-Objekten.

HILFSSATZ 6.1. *Kein Objekt* (1.10)-(1.13) *mit* R_*^m *als Fiber ist mit einem der* J-*Objekte* (1.1) *für* $n \geqslant 2$ *äquivalent.*

Beweis. Wir beweisen nur, daß das J-Objekt

$$\omega' = G(J)\omega, \quad \omega \in R_*^m, \tag{6.1}$$

mit keinem der Objekte

$$\sigma' = \varphi(J)A\sigma, \quad \sigma \in R_*^m, \tag{6.2}$$

äquivalent ist. Der Beweis für die Objekte (6.1) und (1.7) ist ganz analog.

Die Subobjekte von (6.1) und (6.2), die der Untergruppe $J = 1$ entsprechen, haben folgende Transformationsformeln

$$\omega' = \omega, \quad J = 1, \quad \omega \in R_*^m, \tag{6.3}$$

und

$$\sigma' = A\sigma, \quad J = 1, \quad \sigma \in R_*^m. \tag{6.4}$$

Das Objekt (6.3) hat unendlich viele Transitivfibern (2) und (6.4) hat nur eine transitive Fiber. Mit Hilfe des Satzes ([4], S. 42, Theorem 1) über die Transitivfibern der äquivalenten geometrischen Objekte folgt daraus, daß (6.3) mit (6.5) also auch (6.1) mit (6.2) nicht äquivalent ist.

---

(2) Jeder Punkt stellt eine Transitivfiber dar.

Bemerkung 6.1. Der letzte Beweis bleibt auch ohne Meßbarkeitsvoraussetzung der Skalarfunktion φ in Kraft.

Schlußbemerkung. Aus den Hilfssätzen 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 5.2 und 6.1 folgt der Satz 1.1. Er kann auch in nachstehender Form ausgedrückt werden.

SATZ 7.1. *Unter der Meßbarkeitsvoraussetzung (über die Funktion φ in (1.2) und (1.3)) ist jedes lineare homogene geometrische Objekt erster Klasse in X_n ($n \geqslant 3$) mit dem ganzen R^m als Fiber, dessen Komponentenzahl $m \leqslant n$ ist, mit genau einem der folgenden Objekte stark äquivalent:*

1. *Das J-Objekt.*
2. *Die kontravariante W-Vektordichte mit bestimmtem Gewicht.*
3. *Die kontravariante G-Vektordichte mit bestimmtem Gewicht.*
4. *Die kovariante W-Vektordichte mit bestimmtem Gewicht.*
5. *Die kovariante G-Vektordichte mit bestimmtem Gewicht.*

Bemerkung 6.2. Ist das Gewicht gleich Null, so werden die kontra- bzw. kovarianten W-Vektordichten einfach kontra- bzw. kovarianten Vektoren.

LITERATURNACHWEIS

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Determination of geometric objects of the type (2,2,1) with a linear homogeneous transformation formula*, Annales Polonici Mathematici 14 (1963), S. 29-48.

[3] — *Determination of linear differential geometric objects of the first class with two components in a two-dimensional space*, ibidem 15 (1964), S. 77-84.

[4] — *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne 43, Warszawa 1964.

[5] — *Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte vom Typus J mit drei Komponenten*, Rozprawy Matematyczne 48, Warszawa 1965.

[6] M. Kucharzewski und A. Zajtz, *Über die linearen geometrischen Objekte des Typus $(m, n, 1)$, wo $m \leqslant n$ ist*, Annales Polonici Mathematici 18 (1966), S. 205-225.

[7] M. Kuczma, *On linear differential geometric objects of the first class with one component*, Publicationes Mathematici 6 (1959), S. 72-78.

[8] A. Zajtz, *Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte des Typus J mit messbarer Transformationsregel*, ibidem (im Druck).

[9] — *Über die Äquivalenz der geometrischen Objekte*, Annales Polonici Mathematici (im Druck).

Reçu par la Rédaction le 9. 12. 1965