COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XIV WARSZAWA—WROCŁAW 1966

*ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ АЛГЕБР**

Л. А. БОКУТЬ (НОВОСИБИРСК)

1. В первой части доклада рассматривался вопрос о понятии алгебраической замкнутости для различных классов универсальных алгебр. Классический пример алгебраически замкнутых объектов — это алгебраически замкнутые поля. Некоторые подходы к этому понятию в случае групп, коммутативных колец, универсальных алгебр содержатся в работах [1], [11], [14], [15], [25]. Автором [2], [3] понятие алгебраической замкнутости было рассмотрено для следующих классов (неассоциативных) колец, которые являются алгебрами над некоторым фиксированным полем P: всех неассоциативных алгебр над P, коммутативных, антикоммутативных и лиевых алгебр. Приведем соответствующие определения. Пусть Δ — один из перечисленных классов алгебр, A — Δ-алгебра, $P(x_1, \ldots, x_n)$ — свободная Δ-алгебра над P с образующими $x_1, \ldots, x_n$, $R = A * P(x_1, \ldots, x_n)$ — свободное Δ-произведение алгебр A и $P(x_1, \ldots, x_n)$. Выражение вида

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

где $f \in R$, $f \notin A$, будем называть *Δ-алгебраическим уравнением* над алгеброй A. Алгебру A назовем *Δ-алгебраически замкнутой*, если любое Δ-алгебраическое уравнение над алгеброй A имеет в A решение. Имеет место следующий результат [2], [3]:

Теорема 1. *Произвольную Δ-алгебру можно вложить в алгебраически замкнутую Δ-алгебру.*

Эта теорема доказывается с помощью методов, развитых в работах Ширшова [26], [27], [28].

Теорема 1 в качестве частных случаев содержит теоремы Неймана [24] и Кона [7] о том, что произвольные неассоциативные и лиевы алгебры вложимы в неассоциативные и, соответственно, лиевы алгебры с делением.

---

* Резюме доклада прочитанного на конференции по универсальным алгебрам в Варшаве, 7-11 сентября 1964 г.

Понятие алгебраической замкнутости, сформулированное выше для классов неассоциативных колец, естественным образом переносится, например, на случаи ассоциативных алгебр или групп [1]. Было бы интересно решить следующие вопросы:

Вопрос 1. Существуют ли алгебраически замкнутые ассоциативные алгебры? **(P 541)**

Вопрос 2. Существуют ли алгебраически замкнутые группы? **(P 542)**

Некоторые результаты по уравнениям в ассоциативных алгебрах и группах можно найти в работах [4], [5], [7], [8], [9], [12], [13], [16], [17], [18], [23].

2. Вторая часть доклада была посвящена вопросам вложения ассоциативных колец в тела и полугрупп в группы. Основные фундаментальные результаты в этой области принадлежат Мальцеву [19], [20], [21], [22]. В работах [20] и [21] указана бесконечная система аксиом, имеющих вид условных тождеств, описывающая класс полугрупп, вложимых в группы, и доказано, что этот класс полугрупп не описывается никакой конечной совокупностью условных тождеств.

В работах [19] и [21] Мальцевым была решена следующая проблема Ван-дер-Вардена: Условие отсутствия делителей нуля не является достаточным для вложимости кольца в тело. Именно, были построены примеры колец вида $P(S)$, где S — полугруппа, P — поле. $P(S)$ — полугрупповое кольцо S над P, которые удовлетворяют условиям:

α_1) Кольцо $P(S)$ не содержит делителей нуля.

α_2) Полугруппа S не вложима в группу.

Доказано также (см. [22] и [6]), что класс колец, вложимых в тела, описывается требованием отсутствия делителей нуля и некоторыми условными тождествами. Каковы эти тождества, остается невыясненным.

В связи с последними результатами важной является следующая нерешенная пока

Проблема А. И. Мальцева. Не будет ли условие вложимости мультипликативной полугруппы кольца в группу достаточным для вложимости кольца в тело?

Другими словами, речь идет о существовании колец R, удовлетворяющих условиям:

β_1) R без делителей нуля;

(1) Под уравнением над группой A мы понимаем выражение вида $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$, где $f \in A * G(x_1, \ldots, x_n)$, G — свободная группа, и f не сопряжено ни с каким элементом из A.

β_2) полугруппа $R^{\times}$ (мультипликативная полугруппа ненулевых элементов кольца R) вложима в группу;

β_2) R не вложимо в тело.

В связи с этой проблемой и примерами колец, удовлетворяющих условиям α_1 и α_2, естественно встает следующий вопрос: существуют ли кольца вида $P(S)$, удовлетворяющие условиям:

γ_1) $P(S)$ без делителей нуля.

γ_2) Полугруппа S вложима в группу.

γ_3) Кольцо $P(S)$ не вложимо в тело.

Оказывается, что кольца, удовлетворяющие условиям γ_1, γ_2 и γ_3, существуют. Приведем соответствующие примеры.

Пусть Q_n, $n \geqslant 2$, — полугруппа с единицей, заданная образующими $a_1, \ldots, a_{2n}$; $p_1, \ldots, p_{2n}$; $d_1, \ldots, d_n$; b_1, b_2 и определяющими соотношениями

$$a_{2i-1}p_{2i} = p_{2i-1}b_1, \qquad a_{2i}p_{2i} = p_{2i+1}b_2, \tag{2}$$

где $i = 1, \ldots, n$ и считаем, что $p_{2n+1} \equiv p_1$;

$$a_{2i}d_i = a_{2i+1}d_{i+1}, \tag{3}$$

где $i = 1, \ldots, n$ и считаем, что $a_{2n+1} \equiv a_1$, $d_{n+1} \equiv d_1$.

Можно доказать, что полугруппы Q_n вложимы в группы и что кольца $P(Q_n)$ не содержат делителей нуля (см. [29]). Укажем, какие из колец $P(Q_n)$ заведомо не вложимы в тела. Пусть, сначала, характеристика поля P конечна и равна p. Покажем, что кольца $P(Q_{p^k})$ не вложимы в тела. Пусть при некотором $k > 0$ кольцо $P(Q_{p^k})$ вложимо в тело D. Тогда в D имеем:

$$a_{2n}a_{2n-1}^{-1}\ldots a_2a_1^{-1}p_1 = p_1(b_2b_1^{-1})^n \qquad (\text{из } (2)),$$
$$a_{2n}a_{2n-1}^{-1}\ldots a_2a_1^{-1} = 1, \qquad \text{где} \quad n = p^k \qquad (\text{из } (3)).$$

Поэтому

$$0 = (b_2b_1^{-1})^n - 1 = (b_2b_1^{-1} - 1)^{p^k}.$$

Отсюда следует, что $b_1 = b_2$ в $P(Q_{p^k})$, что невозможно.

Эти же рассуждения показывают, что кольца $P(Q_2)$ при произвольном P (в частности, характеристики нуль) не вложимы в тела.

Кольца $P(Q_n)$ при $n > 2$ обладают ещё следующим свойством: они являются QB-кольцами в приводимом ниже смысле (см. [30]). Назовем кольцо с единицей QB-кольцом, если оно не содержит делителей нуля и если в нем пересечение любых двух главных правых (левых) идеалов есть главный правый (левый) идеал:

$$aR \cap bR = cR, \qquad Ra \cap Rb = Rc.$$

Класс QB-колец является более широким, чем класс WB-колец (weak Bezout rings), введенный Коном [10] (WB-кольца дополнительно удовлетворяют еще условию: $aR \cap bR \neq 0 \rightarrow aR+bR = cR$). Пока неизвестны примеры WB-колец, не вложимых в тела. Для QB-колец этот вопрос решается.

Кольца, удовлетворяющие условиям γ_1, γ_2 и γ_3 интересны также в связи со следующей известной проблемой:

Существуют ли кольца вида $P(S)$, удовлетворяющие условиям:

1) $P(S)$ без делителей нуля;

2) S — группа;

3) Кольцо $P(S)$ не вложимо в тело.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Annie Beserre, *Un analogue de la clôture algébrique pour les anneaux*, Comptes Rendus Paris, 254 (1962), стр. 400-403.

[2] Л. А. Бокуть, *Вложение алгебр Ли в алгебраически замкнутые алгебры Ли*, Алгебра и Логика Семинар, 1 (1962), 2, стр. 47-53.

[3] — *Вложение алгебр в алгебраически замкнутые алгебры*, Доклады Академии Наук СССР, 145 (1962), стр. 963-964.

[4] — *Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп* I, Сибирский Математический Журнал, 4 (1963), стр. 500-518; II, тамже 4 (1963), стр. 729-743.

[5] — *Об одной проблеме Капланского*, тамже 4 (1963), стр. 1184-1185.

[6] И. Е. Бурмистрович, *О вложении колец в тела*, тамже 4 (1963), стр. 1235-1240.

[7] P. M. Cohn, *Simple rings without zerodivisors and Lie division rings*, Mathematica 6 (1959), стр. 14-18.

[8] — *On a class of simple rings*, тамже 5 (1958), стр. 103-117.

[9] — *On the embedding of rings in skew field*, Proceedings London Mathematical Society 11 (1961), стр. 43.

[10] — *Noncommutative unique factorization domains*, Transactions. American Mathematical Society, 109 (1963), стр. 313-331.

[11] Mária Erdélyi, *On n-algebraically closed groups*, Publicationes Mathematicae (Debrecen) 7 (1960), стр. 310-315.

[12] Murray Gerstenhaber and Oscar S. Rothaus, *The solution of sets of equations in groups*, Proceedings of the National Academy of Sciences USA 48 (1962), стр. 1531-1533.

[13] B. Harris, *Commutator in division rings*, Proceedings of the American Mathematical Society 9 (1958), стр. 628-631.

[14] B. Jónsson, *Universal relational systems*, Mathematica Scandinavica 4 (1956), стр. 193-208.

[15] — *Algebraic extensions of relational systems*, тамже 11 (1962), стр. 179-205.

[16] E. E. Lazerson, *Onto inner derivations in division rings*, Bulletin of the American Mathematical Society 67 (1961), стр. 356-358.

[17] F. Levin, *Solution of equation over groups*, тамже 68 (1962), стр. 603-604.

[18] — *Solution of equation over groups*, Notices of the American Mathematical Society 9 (1962), стр. 129.

[19] A. J. Malcev, *On the immersion of an algebraic ring into a field*, Mathematische Annalen 113 (1937), стр. 686-691.

[20] А. И. Мальцев, *О включении ассоциативных систем в группы*, Математический Сборник 6 (1939), стр. 331-336.

[21] — *О включении ассоциативных систем в группы* II, Математический Сборник, 8 (1940), стр. 251-264.

[22] — *Квазипримитивные классы абстрактных алгебр*, Доклады Академии Наук СССР 108 (1956), стр. 187-189.

[23] G. Meisters, *On the equation* $ax-xb=e$ *in division rings*, Proceedings of the American Mathematical Society 12 (1961), crp. 428-432.

[24] B. H. Neumann, *Embedding non-associativ rings in division rings*, тамже 1 (1951), стр. 241-256.

[25] W. R. Scott, *Algebraically closed groups*, тамже 2 (1951), стр. 118-121.

[26] А. И. Ширшов, *Некоторые алгоритмические проблемы для ε-алгебр*, Сибирский Математический Журнал 3 (1962), стр. 132-137.

[27] — *Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли*, тамже 3 (1962), стр. 292-296.

[28] — *Об одной гипотезе теории алгебр Ли*, тамже 3 (1962), стр. 297-301.

[29] Л. А. Бокуть, *Некоторые примеры колец без делителей нуля*, Алгебра и Логика, Семинар, 3 (1964), 5-6, стр. 5-28.

[30] — *Факторизационные теоремы для некоторых классов колец без делителей нуля I*, тамже 4 (1965), 4, стр. 25-52.

Reçu par la Rédaction le 30. 11. 1964