COLLOQUIUM MATHEMATICUM

XIV WARSZAWA–WROCŁAW 1966

EINIGE NEUE RESULTATE ÜBER ABSTRAKTE HALBGRUPPEN *

VON

HANS-JÜRGEN HOEHNKE (BERLIN)

Analog der Jacobsonschen Theorie der Ringe läßt sich eine Strukturtheorie der Halbgruppen begründen, die auf den homomorphen Darstellungen der Halbgruppe S durch Transformationen einer Menge M (anstelle der Endomorphismen eines Moduls) beruht. In [6]-[9] werden die Grundzüge einer solchen Theorie beschrieben. Auch in Abschnitt 1 und 2 findet der Leser einige Grundbegriffe aus dieser Theorie. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung besteht darin, frühere Resultate, die sich um die Begriffe „radikal" und „radikalfrei" gruppieren, unter allgemeineren Gesichtspunkten als bisher zu behandeln.

Andrunakievič und Rjabuhin [2] haben den Begriff einer allgemeinen Klasse von Moduln eingeführt und dadurch für jedes allgemeine Radikal (im Sinne von Kuroš-Amitsur) eines Ringes eine gewisse Darstellung angeben können. Indem wir solche Bedingungen aus [2] eliminieren, die ihren Sinn beim Übergang von Idealen zu Kongruenzen und von Ringen zu beliebigen Algebren verlieren, erhalten wir eine einheitliche Strukturtheorie abstrakter Algebren, welche Ringe [1], [2], [10], Halbgruppen [6]-[9] und Gruppen [15], [16] einschließt.

1. Es sei S eine Halbgruppe, M eine Menge und $M\times S\to M$ eine Abbildung von $M\times S$ in M, so daß für alle $a,b\in S$ und $x\in M$ stets

$$(xa)b = x(ab)$$

gilt. Hierin bedeutet $xa\,(x\in M,\ a\in S)$ das Bild von $(x,a)\in M\times S$ in M. Die Menge M mit dem Operatorenbereich S wird dann kurz als *S-System* bezeichnet. Jedes S-System M gibt Anlaß zu einer homomorphen Darstellung der Halbgruppe S durch eindeutige Abbildungen (Transformationen) der Menge M in M und umgekehrt.

* Erweiterte Fassung eines auf der Tagung über Allgemeine Algebra (Warschau, 7-11 September 1964) gehaltenen Vortrages.

2. Sei Γ eine Gruppe mit dem Einselement 1 und M ein unitäres Γ-Linkssystem (d. h. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ und $1x = x$ für alle $\alpha, \beta \in \Gamma$ und alle $x \in M$). Offenbar ist die zugehörige Darstellung eine Permutationsdarstellung von Γ. Der Zentralisator $\mathrm{Hom}_\Gamma(M, M)$ von M ist erklärt als die Gesamtheit aller der Transformationen $a: x \to xa$ $(x \in M)$ der Menge M, die mit jedem Element $\gamma \in \Gamma$ vertauschbar sind: $(\gamma x)a = \gamma(xa)$ für alle $x \in M$. Es sei S eine Teilhalbgruppe von $\mathrm{Hom}_\Gamma(M, M)$. Dann ist M zugleich Γ-Linkssystem und S-System, d. h. M ist ein (Γ, S)-System. Sei

$$f_\Gamma(M) = \{x \mid x \in M, \exists \delta \in \Gamma \setminus \{1\}: \delta x = x\}.$$

$f_\Gamma(M)$ ist als die Menge der „lokalen" Fixelemente von M bez. Γ (oder auch: von Γ in M) anzusehen, wobei das Einselement 1 natürlich auszuschließen ist. Offenbar ist $f_\Gamma(M)$ ein (evtl. leeres) (Γ, S)-Teilsystem von M. Für das Differenzsystem $M/f_\Gamma(M)$, das aus den einelementigen Restklassen $\{x\}$ für $x \in M \setminus f_\Gamma(M)$ und (falls $f_\Gamma(M) \neq \emptyset$) der Restklasse $f_\Gamma(M)$ besteht und gleichfalls ein (Γ, S)-System ist, gilt offenbar $f_\Gamma(M/ /f_\Gamma(M)) = \emptyset$ oder $= \{f_\Gamma(M)\}$, mit anderen Worten:

2.1. $M/f_\Gamma(M)$ hat höchstens ein einziges lokales Fixelement bez. Γ; wenn ein solches existiert, so ist es in diesem Fall sogar „globales" Fixelement (d. h. Fixelement aller $\gamma \in \Gamma$).

Wir betrachten nun die Eigenschaft:

(2.2) Jedes Element $\neq 1$ aus Γ hat höchstens ein Fixelement in dem Γ-Linkssystem M.

Dann gilt:

2.3. Jedes unitäre Γ-Linkssystem M mit der Eigenschaft (2.2) ist genau für $|M| > 1$ bzw. $|M| = |\Gamma| = 1$ treu (d.h., wenn $\gamma x = \delta x$ für alle $x \in M$, so $\gamma = \delta$).

Die treuen unitären Γ-Linkssysteme mit der Eigenschaft (2.2) sind offenbar identisch mit dem Urbanikschen Fall (iii) (vgl. [19] und [20]) der Marczewskischen v-Algebren. Da in diesen Algebren der Marczewskische Begriff der Unabhängigkeit fundamentale Eigenschaften der linearen Unabhängigkeit besitzt, ist es, in Analogie zu den Vektorräumen, vielleicht von Interesse, den Zentralisator $\mathrm{Hom}_\Gamma(M, M)$ zu bestimmen.

Zunächst hat man:

2.4. Ist M ein Γ-Linkssystem mit der Eigenschaft (2.2) und $Z = \mathrm{Hom}_\Gamma(M, M)$, so ist $f_\Gamma(M) \subseteq F_Z(M)$, wo $F_Z(M) = \{x \mid x \in M, \forall a \in Z: xa = x\}$ die Menge der globalen Fixelemente von M bez. Z ist.

Aus 2.4 folgt

2.5. Unter den gleichen Voraussetzungen wie in 2.4 ist Z schon durch seine Wirkung auf $M/f_\Gamma(M)$ eindeutig bestimmt.

Ist M ein treues unitäres Γ-Linkssystem mit der Eigenschaft (2.2) und ersetzt man M im Hinblick auf 2.5 bei der Berechnung von Z durch $M' = M/f_\Gamma(M)$, so gilt zufolge 2.1 $|f_\Gamma(M')| \leqslant 1$. Danach ist M' ein spezielles unitäres Γ-Linkssystem mit der Eigenschaft (2.2). Schließt man den Fall $|M'| = 1$, $|\Gamma| > 1$ aus, in welchem $Z = \{1\}$ wird, so ist M' zufolge 2.3 gleichfalls treu. Man darf sich also weiterhin auf solche unitären Γ-Linkssysteme M beschränken, für welche gilt:

$$(2.6) \qquad |f_\Gamma(M)| \leqslant 1 \quad \text{und} \quad |M| \begin{cases} > 1 \\ \text{oder} \\ = |\Gamma| = 1. \end{cases}$$

Wir setzen noch:

$$(2.7) \qquad \Delta = \begin{cases} \Gamma, & \text{falls } f_\Gamma(M) = \emptyset; \\ \Gamma \cup \{0\}, & \text{falls } |f_\Gamma(M)| = 1; \end{cases}$$

dabei ist 0 ein zu Γ adjungiertes Nullelement (d. h. $0\delta = \delta 0 = 0$ für alle $\delta \in \Gamma \cup \{0\}$). Für $0 \in \Delta$ wird Δ auch als Gruppe mit Null bezeichnet.

Definiert man $0x$ durch $0x \in f_\Gamma(M)$ (wegen $|f_\Gamma(M)| = 1$ ist $0x$ eindeutig bestimmt), so wird M zu einem Δ-Linkssystem, und es gilt $\mathrm{Hom}_\Gamma(M, M) = \mathrm{Hom}_\Delta(M, M)$.

2.8. Ein Δ-Linkssystem M, das wie angegeben aus einem unitären Γ-Linkssystem M mit der Eigenschaft (2.6) hervorgeht, soll *Vektorsystem über* Δ heißen; die gleichen Vektorsysteme wurden auf andere Weise schon in [8] eingeführt und lassen sich wie folgt isomorph darstellen. Sei Δ eine Gruppe oder Gruppe mit Null. Für eine gegebene Indexmenge I bilden die Symbole $(\delta)_i$ $(\delta \in \Delta, i \in I)$ ein Vektorsystem über Δ, falls $(0)_i = (0)_j$ für $0 \in \Delta$ und alle $i, j \in I$ und $\gamma(\delta)_i = (\gamma\delta)_i$ für $\gamma, \delta \in \Delta$ und $i \in I$ gesetzt wird. Betrachtet man die Wirkung von $\mathrm{Hom}_\Delta(M, M)$ auf die „Basis" $\{(1)_i \mid i \in I\}$, so ergibt sich [7]:

2.9. Die Halbgruppe $\mathrm{Hom}_\Delta(M, M)$, für ein Vektorsystem M über Δ, ist isomorph darstellbar als das Kranzprodukt $H_I(\Gamma)$ von Γ mit H_I, wobei H_I die Halbgruppe aller Transformationen (falls $0 \notin \Delta$) bzw. aller Teiltransformationen (falls $0 \in \Delta$) von I bezeichnet und Γ mit Δ gemäß (2.7) zusammenhängt.

Die Halbgruppe $H_I(\Gamma)$ spielt eine große Rolle in der Strukturtheorie abstrakter Halbgruppen, und zwar bei der Charakterisierung aller primitiven Halbgruppen mit irreduziblen, von einem Idempotent erzeugten Rechtsidealen ([8], vgl. auch Abschnitt 9). Wir wollen hier einige Resultate aus dieser Theorie in eine allgemeine Theorie einbeziehen, die analog ist zu der kürzlich von Andrunakievič und Rjabuhin [2] im Fall assoziativer Ringe begründeten Theorie. Wir werden sogar noch einen Schritt weiter gehen und eine einheitliche Theorie für universelle Algebren von beliebigem Typus aufstellen. Dazu verwenden wir anstelle von Darstellungsmoduln oder S-Systemen die Darstellungen selbst. Erst in Abschnitt 8 wenden wir uns der Frage nach der Realisierung solcher Darstellungen zu.

3. Es sei A eine Algebra. Eine Kongruenz in A ist eine Äquivalenzrelation C, aufgefaßt als eine Teilmenge von $A \times A$, mit gewissen Verträglichkeitseigenschaften bez. der Verknüpfungen in A. Das Symbol $\mathbf{0}_A$ bzw. $\mathbf{1}_A$ (oder kürzer $\mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{1}$) bezeichnet die Null- bzw. Allrelation in A. Jeder Homomorphismus $\varphi\colon A \to A'$ von A auf eine Algebra A' von gleichem Typ wie A gibt Anlaß zu der Kongruenz

$$\operatorname{Ann}\varphi = \{(a, b) \mid (a, b) \in A \times A\,,\ (a\varphi, b\varphi) \in \mathbf{0}_A\},$$

dem Annullator von φ in A, so daß für die Restklassenstruktur $A/\operatorname{Ann}\varphi$ von A nach $\operatorname{Ann}\varphi$ gilt $A/\operatorname{Ann}\varphi \simeq A'$. Für $\operatorname{Ann}\varphi = \mathbf{0}$ heißt φ *treu.* Ist A eine Teilmenge von $\mathbf{1}_A$, so sei $B\varphi = \{(a\varphi, b\varphi) \mid (a, b) \in B\}$. Für $\mathbf{1}_A\varphi = \mathbf{0}_{A'}$ (d. h. $\mathbf{1}_{A'} = \mathbf{0}_{A'}$, also $|A'| = 1$) heißt φ *Nullhomomorphismus.* $\mathscr{C}(A)$ bezeichnet den Kongruenzenverband in A.

Sei Σ_A eine beliebige Klasse von Homomorphismen von A. Unter dem *Annullator der Klasse* Σ_A verstehen wir die Menge $\operatorname{Ann}\Sigma_A = \{\operatorname{Ann}\sigma \mid \sigma \in \Sigma_A\}$. Wir setzen

$$\bigcap \operatorname{Ann}\Sigma_A = \bigcap_{\sigma \in \Sigma_A} \operatorname{Ann}\sigma \qquad \bigl(\in \mathscr{C}(A)\bigr).$$

Für $\Sigma_A = \emptyset$ ist vereinbarungsgemäß $\bigcap \operatorname{Ann}\Sigma_A = \mathbf{1}_A$.

3.1. Es sei A eine Algebra und $\chi\colon A \to A\chi$ ein Homomorphismus von A auf $A\chi$. Für einen Homomorphismus ψ von $A\chi$ ist die durch $a\varphi = (a\chi)\psi$ definierte Abbildung $\varphi = \chi\psi$ ein Homomorphismus von A mit $\operatorname{Ann}\gamma \subseteq \operatorname{Ann}\varphi$. Wenn umgekehrt φ ein Homomorphismus von A mit $\operatorname{Ann}\chi \subseteq \operatorname{Ann}\varphi$ ist, so ist die durch $a\chi \to a\varphi$ $(a \in A)$ definierte und mit $\chi^{-1}\varphi$ bezeichnete Abbildung ein Homomorphismus von $A\chi$. Überdies gelten die Regeln

$$(\operatorname{Ann}\varphi)\chi = \operatorname{Ann}(\chi^{-1}\varphi), \qquad \operatorname{Ann}\psi = (\operatorname{Ann}\chi\psi)\chi.$$

Nun sei $\mathfrak{K}^0$ eine feste primitive Klasse von Algebren (im Sinne von Birkhoff). Jeder Algebra $A \in \mathfrak{K}^0$ sei eine gewisse (leere oder nichtleere) Klasse Σ_A von Nicht-Nullhomomorphismen zugeordnet. Sei Σ das genau aus diesen Σ_A bestehende Schema. Wir schreiben hierfür auch kurz $\Sigma = \{\Sigma_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$, meinen damit aber stets die eindeutige Zuordnung $\Sigma\colon A \to \Sigma_A$ (worin A die Klasse $\mathfrak{K}^0$ durchläuft); die Klassen Σ_A sind sozusagen die Komponenten des Schemas Σ. Streng genommen müßten wir also $\Sigma = \{(\Sigma_A, A) \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ schreiben. (In der Literatur findet sich gelegentlich die Schreibweise $\{\Sigma_A\}_{A \in \mathfrak{K}^0}$.) Diese Bemerkung bezieht sich auch auf andere Fälle, sobald aus dem Zusammenhang zu ersehen ist, daß es sich dabei um eine eindeutige Zuordnung handelt. Da die hier vorkommenden Operationen zwischen Schemata stets komponentenweise erklärt sind, so dürften sich daraus, daß wir uns (der Kürze wegen) der mengentheoretischen Symbolik im folgenden etwas freier bedienen als es wohl üblich ist, kaum Widersprüche ergeben.

Im Hinblick auf 3.1 wird man zu folgender Definition geführt:

3.2. Σ heißt ein *allgemeines Schema von Darstellungen*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

Es sei χ irgendein Homomorphismus von A.

(3.2.1) Aus $\psi \in \Sigma_{A\chi}$ folgt $\chi\psi \in \Sigma_A$.

(3.2.2) Aus $\varphi \in \Sigma_A$ und $\operatorname{Ann}\chi \subseteq \operatorname{Ann}\varphi$ folgt $\chi^{-1}\varphi \in \Sigma_{A\chi}$.

Sei Σ ein allgemeines Schema von Darstellungen. Dann heißt $\bigcap \operatorname{Ann} \Sigma_A$ das *Σ-Radikal* $R(\Sigma, A)$ von A. Wenn $\Sigma_A = \emptyset$ ist, so soll A als *Σ-radikal* bezeichnet werden; ist $R(\Sigma, A) = \mathbf{0}$, so heißt A *Σ-radikalfrei*. Genau dann ist A Σ-radikal, wenn $R(\Sigma, A) = \mathbf{1}$.

3.3. Das homomorphe Bild einer Σ-radikalen Algebra ist Σ-radikal.

Hier, wie sonst durchweg in diesem und dem nächsten Abschnitt, verzichten wir auf den Beweis. Die (im übrigen leichten) Beweise können ähnlich wie für entsprechende Sätze aus [2] erbracht werden.

3.4. Für einen Homomorphismus χ von A mit $\operatorname{Ann}\chi \subseteq R(\Sigma, A)$ gilt $R(\Sigma, A\chi) = \big(R(\Sigma, A)\big)\chi$, insbesondere $R(\Sigma, A/B) = R(\Sigma, A)/B$ für eine Kongruenz $B \in \mathscr{C}(A)$ mit $B \subseteq R(\Sigma, A)$.

Hierin bedeutet für zwei Kongruenzen $B \subseteq C$ in A das Symbol C/B diejenige Kongruenz in A/B, die der Kongruenz C entspricht.

Aus 3.4 folgt:

$$R\big(\Sigma, A/R(\Sigma, A)\big) = \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

3.6. $A \in \mathfrak{K}^0$ ist genau dann Σ-radikal, wenn sich A von keinem Nicht-Nullhomomorphismus auf eine Σ-radikalfreie Algebra abbilden läßt.

3.7. Das Σ-Radikal $R(\Sigma, A)$ ist gleich dem Durchschnitt aller der Kongruenzen $C \in \mathscr{C}(A)$, für welche A/C Σ-radikalfrei ist.

Daraus folgt:

3.8. Eine Algebra A, die subdirekt zerlegbar in Σ-radikalfreie Algebren A_i ist, ist selbst Σ-radikalfrei.

Für ein allgemeines Schema Σ von Darstellungen sei $\mathfrak{L}(\Sigma)$ die Teilklasse aller der Algebren $A \in \mathfrak{K}^0$, deren Klasse Σ_A wenigstens einen Isomorphismus enthält.

3.9. Die Σ-radikalfreien Algebren stimmen überein mit denjenigen Algebren, die subdirekt zerlegbar sind in Algebren aus der Klasse $\mathfrak{L}(\Sigma)$.

4. Es sei I eine Menge, $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Homomorphismen

$A \to A_i$ der Algebra A auf die Algebren A_i und $\bigtimes_{i \in I} A_i$ das direkte Produkt der Algebren A_i, dessen Elemente in der Form $\{(a_i, i) \mid i \in I\}$ mit $a_i \in A_i$ geschrieben werden dürfen. Der durch $a\varphi = \{(a\varphi_i, i) \mid i \in I\}$ definierte Homomorphismus φ von A in $\bigtimes_{i \in I} A$ heißt das *direkte Produkt* $\bigtimes_{i \in I} \varphi_i$ der φ_i. Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar

4.1. Genau dann ist die Algebra A Σ-radikalfrei, wenn ein Isomorphismus φ von A existiert, welcher das direkte Produkt $\bigtimes_{i \in I} \varphi_i$ von gewissen Darstellungen $\varphi_i \in \Sigma_A$ ist.

5. Es sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von Algebren von gleichem Typ wie die Algebren der Klasse $\mathfrak{K}^0$. Für $A \in \mathfrak{K}^0$ sei T_A die Klasse aller der Homomorphismen τ von A, für welche $A\tau \in \mathfrak{K}$ ist. Sei T das Schema dieser T_A $(A \in \mathfrak{K}^0)$. Offenbar ist $T^- = \{T_A^- \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ für $T_A^- = \{\tau \mid \tau \in T_A, |A\tau| \neq 1\}$ ein allgemeines Schema von Darstellungen.

5.1. Ein allgemeines Schema Σ von Darstellungen heißt $\mathfrak{K}$-*Schema*, falls $\Sigma \leqslant T$ (d.h. $\Sigma_A \subseteq T_A$ für alle $A \in \mathfrak{K}^0$). Gleichbedeutend damit ist $\Sigma \leqslant T^-$.

6. Für zwei allgemeine Schemata Σ und Σ' von Darstellungen definieren wir folgende Operationen:

$$\Sigma \vee \Sigma' = \{\Sigma_A \cup \Sigma'_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\},$$

$$\Sigma \wedge \Sigma' = \{\Sigma_A \cap \Sigma'_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}.$$

Bezüglich der Operationen $(\vee, \wedge)$ bilden die allgemeinen Schemata von Darstellungen einen distributiven (in gewissem Sinne vollständigen) Verband $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$.

Offenbar bilden alle $\mathfrak{K}$-Schemata einen (in gewissem Sinne vollständigen) Teilverband $\mathscr{S}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}^0)$ von $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$.

7. Jeder Algebra $A \in \mathfrak{K}^0$ sei eine Kongruenz $R(A) \in \mathscr{C}(A)$ zugeordnet mit folgenden Eigenschaften (χ sei ein Homomorphismus von A):

(7.1) Wenn $\operatorname{Ann}\chi \subseteq R(A)$, so $R(A\chi) = R(A)\chi$.

(7.2) Wenn A subdirekt zerlegbar ist in Algebren A_i und $R(A_i) = \mathbf{0}$ für alle i, so ist auch $R(A) = \mathbf{0}$.

Wir sagen dann, daß in der Klasse $\mathfrak{K}^0$ ein Radikal R definiert ist, und nennen $R(A)$ das *R-Radikal* von A. Eine Algebra A mit $R(A) = \mathbf{0}$ bzw. $R(A) = \mathbf{1}$ heißt *R-radikalfrei* bzw. *R-radikal.* Aus (7.1) folgt speziell $R(A/R(A)) = \mathbf{0}$.

7.3. Ist Q eine Funktion, die jeder Algebra $A \in \mathfrak{K}^0$ eine Kongruenz $Q(A) \in \mathscr{C}(A)$ zuordnet und genügt die Klasse $\mathfrak{K}$ der Bedingung, daß zu jedem $A \in \mathfrak{K}^0$ mit $Q(A) = \mathbf{0}$ eine zu A isomorphe Algebra in $\mathfrak{K}$ existiert, so gilt: Genau dann definiert Q in $\mathfrak{K}^0$ ein R-Radikal ($Q = R$), wenn sich Q als ein Σ-Radikal für ein geeignetes $\mathfrak{K}$-Schema Σ auffassen läßt.

Bei diesem Satz liegt, wie wir deutlichkeitshalber hinzufügen wollen, die Betonung darauf, daß die Existenz eines $\mathfrak{K}$-Schemas (mit gewissen Eigenschaften) behauptet wird.

Beweis. Es sei $Q(A) = R(\Sigma, A)$ für ein geeignetes allgemeines Schema Σ von Darstellungen. Zufolge 3.4 und 3.8 ist (7.1) und (7.2) erfüllt: d. h. $Q = R$.

Nun sei umgekehrt $Q = R$ und H_A die Klasse derjenigen Nichtnullhomomorphismen φ von A, für welche gilt $R(A\varphi) = \mathbf{0}$. Dann erfüllen $H = \{H_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ und T^-, folglich auch $\Sigma = H \wedge T^-$ die Bedingungen (3.2.1) und (3.2.2).

(7.3.1) Für $|A| > 1$ gilt: Die Algebra A ist genau dann R-radikalfrei, wenn Σ_A einen Isomorphismus enthält.

(7.3.2) Sei $\bigcap \operatorname{Ann} \Sigma_A = \mathbf{0}$. Da A subdirekt zerlegbar ist in die (nach (7.3.1) und (3.2.2)) R-radikalfreien Algebren $A\varphi$ ($\varphi \in \Sigma_A$), so ist A zufolge (7.2) R-radikalfrei.

(Hiernach ist A genau dann Σ-radikalfrei, wenn Σ_A einen Isomorphismus enthält, mit anderen Worten, wenn es R-radikalfrei ist.)

Wir zeigen zuerst, daß $R(\Sigma, A) \subseteq R(A)$. Sei $\chi: A \to A/R(A)$ der natürliche Homomorphismus und ψ ein nach Voraussetzung vorhandener Isomorphismus von $A/R(A)$ auf eine Algebra $\in \mathfrak{K}$. Für $R(A) = \mathbf{1}$ ist nichts zu beweisen. Es sei also $R(A) \neq \mathbf{1}$. Dann ist $\chi\psi$ kein Nullhomomorphismus; und da $R(A\chi\psi) = R\big(A/R(A)\big)\psi = \mathbf{0}\psi = \mathbf{0}$, so gehört $\chi\psi$ zu Σ_A. Daher ist $R(\Sigma, A) \subseteq \operatorname{Ann}\chi = R(A)$. Nun bilden wir $R\big(A/R(\Sigma, A)\big) = R(A)/R(\Sigma, A)$ (man beachte (7.1)). Nach (7.3.2) ist $A/R(\Sigma, A)$ R-radikalfrei, somit $R(A) = R(\Sigma, A)$.

Offenbar ist das soeben konstruierte $\mathfrak{K}$-Schema Σ das maximale im Verband $\mathscr{S}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}^0)$ enthaltene $\mathfrak{K}$-Schema, für welches $R(\Sigma, A) = R(A)$ gilt.

8. In diesem Abschnitt wollen wir zur Betrachtung relativ konkreter Formen eines $\mathfrak{K}$-Schemas übergehen. Es sei $\mathfrak{M}$ eine gegebene Klasse von Algebren, so daß mit $M \in \mathfrak{M}$ auch jede Teilalgebra von M zu $\mathfrak{M}$ gehört.

8.1. $\mathfrak{K}^1$ sei die Klasse aller Algebren A, die folgenden Bedingungen genügen:

(8.1.1) $A \in \mathfrak{K}^0$.

(8.1.2) Es existiert ein $M \in \mathfrak{M}$, so daß A, als Menge betrachtet, in der Endomorphismenhalbgruppe $\mathfrak{E}(M)$ der Algebra M enthalten ist.

Über die konkrete Natur der in $A \in \mathfrak{K}^1$ erklärten Verknüpfungen aber und insbesondere darüber, ob und auf welche Weise sie mit der Multiplikation in $\mathfrak{E}(M)$ zusammenhängen, werden an dieser Stelle keine einschränkenden Voraussetzungen gemacht.

Nun sei $\tau: A \to A\tau$ ein Homomorphismus der Algebra $A \in \mathfrak{K}^0$, für welchen gilt $A\tau \in \mathfrak{K}^1$. In diesem allgemeinen Sinn wollen wir dann, falls $A\tau \subseteq \mathfrak{E}(M)$ (für geeignetes $M \in \mathfrak{M}$), von der homomorphen Darstellung τ von A durch Endomorphismen von M sprechen. In diesem Fall definieren wir außerdem gemäß $xa = x(a\tau)$ $(x \in M, a \in A, a\tau \in A\tau)$ eine äußere Verknüpfung von M mit A.

8.2. Umgekehrt sei eine äußere Verknüpfung (x, a) $(\in M \times A) \to \to xa (\in M)$ von M mit A gegeben. Einem Element $a \in A$ entspricht die Abbildung $x \to xa$ von M in M. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $a\tau$ und die Zuordnung $a \to a\tau$ mit τ und setzen $\mathrm{Ann}\,\tau = \{(a, b) \mid (a, b) \in A \times A, M(a, b) \subseteq \mathbf{0}\}$. Zu der Schreibweise bemerken wir folgendes: Für $X \subseteq M$ und $C \subseteq \mathbf{1}_A$ bedeutet allgemein $XC = \{(xa, xb) \mid x \in X, (a, b) \in C\}$; diese Bezeichnung wird auch angewandt, wenn in A eine Multiplikation erklärt und $X \subseteq A$ ist.

Nunmehr verlangen wir

$$\mathrm{Ann}\,\tau \in \mathscr{C}(A), \tag{8.2.1}$$

$$A\tau \subseteq \mathfrak{E}(M), \tag{8.2.2}$$

und sprechen in einem solchen Fall von der *A-Struktur M*.

Zu jeder homomorphen Darstellung $\tau = \tau_M$ von A im obigen Sinne gehört die A-Struktur M, und umgekehrt gibt jede A-Struktur M auf natürliche Weise Anlaß zu einer ebensolchen homomorphen Darstellung $\tau = \tau_M$. (Man hat in der Bildmenge $A\tau$ zu jeder Verknüpfung $f(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in A)$ in A eine Verknüpfung $f(a_1\tau, \ldots, a_n\tau) = \big(f(a_1, \ldots, a_n)\big)\tau$ einzuführen.) Es wird nicht voraussgesetzt, daß für $M_1 \in \mathfrak{M}$ und $M_2 \in \mathfrak{M}$ aus der Gleichheit von M_1 und M_2 als Mengen und der Gleichung $\tau_{M_1} = \tau_{M_2}$ folgt, daß M_1 und M_2 auch als Algebren übereinstimmen.

Eine Teilalgebra $L \subseteq M$ heißt *A-Teilstruktur*, falls $LA \subseteq L$. Definiert man τ_L mittels τ_M gemäß $x(a\tau_L) = x(a\tau_M)$ für alle $x \in L$ und $a \in A$, so gilt zwar $A\tau_L \subseteq E(L)$. Da wir aber nicht voraussetzen, daß auch $\mathrm{Ann}\,\tau_L \in \in \mathscr{C}(A)$, so bleibt die Frage offen, ob L eine A-Struktur ist. Im Fall der Ringe und Halbgruppen ist dies zwar trivialerweise richtig (siehe unten), doch in anderen konkreten Fällen, so im Fall der Gruppen (siehe Abschnitt 11), scheint es schwierig zu sein, diese Frage zu entscheiden.

Ein Element $x \in M$ heißt *Fixelement* bez. A, wenn $xa = x$ für alle $a \in A$. Mit FM bezeichnen wir die Menge der Fixelemente von M bez. A. Offenbar ist FM stets sowohl eine (evtl. leere) A-Teilstruktur von M als auch eine A-Struktur.

8.3. Eine A-Struktur M (sowie die zugehörige Darstellung τ_M von A) heißt *prim*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(8.3.1) $MA \nsubseteq FM$.

(8.3.2) Aus $xB \subseteq \mathbf{0}$ für $x \in M$ und $B \in \mathscr{C}(A)$, $B \nsubseteq \operatorname{Ann} \tau_M$, folgt $|FM| = 1$ und $x \in FM$.

8.4. Eine A-Struktur M (sowie die zugehörige Darstellung) heißt *irreduzibel*, wenn

(8.4.1) $MA \nsubseteq FM$;

(8.4.2) M enthält nur triviale A-Teilstrukturen (d. h. solche mit $L = M$ oder $|L| = 1$).

Man überlegt sich leicht, daß bei einer primen und ebenso bei einer irreduziblen A-Struktur M stets $|MA| > 1$ und $|FM| \leqslant 1$ sein muß.

Nun sei $\mathfrak{K}$ eine Teilklasse von $\mathfrak{K}^1$. Die Klasse aller primen bzw. irreduziblen Darstellungen τ von $A \in \mathfrak{K}^0$ mit $A\tau \in \mathfrak{K}$ sei $\Sigma_A^{(i\mathfrak{K})}$, $i = 1$ bzw. $i = 2$.

8.5. $\Sigma^{(i\mathfrak{K})} = \{\Sigma_A^{(i\mathfrak{K})} \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ ist ein $\mathfrak{K}$-Schema $(i = 1, 2)$. Wir definieren:

8.6. Enthält $\Sigma_A^{(i\mathfrak{K})}$ einen Isomorphismus, so heißt A in Bezug auf $\mathfrak{K}$ *prim* $(i = 1)$ bzw. *primitiv* $(i = 2)$.

Hierauf stützt sich folgende Definition: Eine Kongruenz $P \in \mathscr{C}(A)$ heißt in Bezug auf $\mathfrak{K}$ *prim* (*primitiv*), wenn die Algebra A/P in Bezug auf $\mathfrak{K}$ prim (primitiv) ist. (Dann wird, wie man sich leicht überlegt, $R(\Sigma^{(i\mathfrak{K})}, A)$ gleich dem Durchschnitt der in Bezug auf $\mathfrak{K}$ primen $(i = 1)$ bzw. primitiven $(i = 2)$ Kongruenzen in A.) Wird die Bedeutung von $\mathfrak{K}$ wie weiter unten angegeben spezialisiert, so stimmt der Begriff der in Bezug auf $\mathfrak{K}$ primen Kongruenz im Fall der Ringe, Halbgruppen und Gruppen bzw. überein mit der zu einem Primideal [10] gehörigen Kongruenz, mit dem in 10.4 erklärten Begriff der Primkongruenz in einer Halbgruppe S (vorausgesetzt, daß dort $P \neq \mathbf{1}$) sowie mit der zu einem primen Normalteiler (11.4) gehörigen Kongruenz. Indessen ist es ein offenes Problem, eine ähnliche Charakterisierung der in Bezug auf $\mathfrak{K}$ primen Kongruenzen durch innere Eigenschaften von A auch für eine beliebige Klasse $\mathfrak{K}^0$ zu finden.

8.7. Es sei $\mathfrak{K}^2$ die Klasse aller Algebren A, die folgenden Bedingungen genügen:

(8.7.1) $A \in \mathfrak{K}^1$;

(8.7.2) $M \in \mathfrak{M}$, $A \subseteq \mathfrak{E}(M)$, $B \in \mathscr{C}(A)$, $x \in M$, $a \in A$ und $xB \subseteq \mathbf{0}$ hat zur Folge, daß $(xa)B \subseteq \mathbf{0}$ (¹).

Allgemeiner sei A eine beliebige Algebra aus $\mathfrak{K}^0$. Für eine A-Struktur M (bzw. für die zugehörige Darstellung τ_M) ist $A\tau_M \in \mathfrak{K}^2$ offenbar gleichbedeutend mit

(8.7.2′) $B \subseteq \mathscr{C}(A)$, $x \in M$, $a \in A$ und $xB \subseteq \mathbf{0}$ impliziert $(xa)B \subseteq \mathbf{0}$.

Hieraus ergibt sich

$$\Sigma^{(1\mathfrak{K})} \geqslant \Sigma^{(2\mathfrak{K})} \quad \text{für} \quad \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}^2. \tag{8.8}$$

Beweis. Es sei $\tau_M \in \Sigma_A^{(2\mathfrak{K})}$, also $A\tau_M \in \mathfrak{K}^2$. Wenn $B \in \mathscr{C}(A)$, $x \in M$, $xB \subseteq \mathbf{0}$ und $B \nsubseteq \operatorname{Ann} \tau_M$, so ist $MB \nsubseteq \mathbf{0}$. Man setze $L = \{y \mid y \in M, yB \subseteq \mathbf{0}\}$. Zufolge (8.7.2′) ist $(yA)B \subseteq \mathbf{0}$ für $y \in L$; daher hat man $LA \subseteq L$. Man überlegt sich leicht, daß L auch eine Teilalgebra von M und daher eine A-Teilstruktur von M ist. Im Hinblick auf $LB \subseteq \mathbf{0}$, $MB \nsubseteq \mathbf{0}$ und (8.4.2) muß $|L| = 1$ sein. Da $x \in L$, ist somit $xa = x$, d. h. $x \in FM$. Daß $|FM| \leqslant 1$ sein muß, wurde bereits erwähnt.

Folgerung:

$$R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, A) \subseteq R(\Sigma^{(2\mathfrak{K})}, A) \quad \text{für} \quad \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}^2. \tag{8.9}$$

Im Gegensatz zu $R(\Sigma, A)$ sind die speziellen Radikale $R(\Sigma^{(i\mathfrak{K})}, A)$, $i = 1, 2$, nicht etwa eingeführt worden, um alle für eine feste Klasse $\mathfrak{K}^0$, wie die Klasse aller Ringe, bekannten oder möglichen Radikalbegriffe in einer dieser beiden Formen darzustellen. Vielmehr erlauben sie es, gewisse Radikale für verschiedene Klassen $\mathfrak{K}^0$ in einheitlicher Form zu erklären.

Ist beispielsweise $\mathfrak{K}^0$ die Klasse aller Ringe, M die Klasse aller Moduln und $\mathfrak{K}$ die Klasse aller Teilringe von Endomorphismenringen von Moduln, so stimmen die vorstehenden Begriffe und Sätze mit bereits bekannten Begriffen und Sätzen der Theorie von Andrunakievič [1] und Jacobson [10] überein; dabei ist $R(\Sigma^{(i\mathfrak{K})}, A)$ die zum Baerschen unteren Radikal ($i = 1$, siehe [1]) bzw. Jacobsonschen Radikal ($i = 2$, siehe [10]) gehörige Kongruenz im Ringe $A \in \mathfrak{K}^0$.

Mit Hilfe des folgenden Satzes kann unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen gezeigt werden, daß eine Algebra in Bezug auf $\mathfrak{K}$ genau dann primitiv ist, wenn sie prim ist, und daß daher in solchen Fällen auch $R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, A) = R(\Sigma^{(2\mathfrak{K})}, A)$ gilt. (Für den Fall der Halbgruppen vgl. hierzu Abschnitt 8 und [9], Satz 18 und 19; für den Fall der Gruppen vgl. Abschnitt 11.)

(¹) Wenn die Bedingung (8.7.2) für wenigstens ein $M \in \mathfrak{M}$ mit $A \subseteq \mathfrak{E}(M)$ erfüllt ist, so ist sie offenbar auch für alle derartigen M erfüllt.

8.10. Wir nehmen an, es existiere eine treue prime A-Struktur M mit folgender Eigenschaft: M enthält eine minimale nichteinelementige A-Teilstruktur L; gleichzeitig sei L eine A-Struktur. Dann ist L eine treue irreduzible A-Struktur.

Beweis. Es sei τ_L: $a \to a\tau_L$, wo $a\tau_L$ die durch $x \to xa$ $(x \in L,\ a \in A)$ definierte Abbildung von L in L ist. (Wegen $L \subseteq M$ ist $a\tau_L \in \mathfrak{E}(L)$.) Wir haben $L \operatorname{Ann} \tau_L \subseteq \mathbf{0}$, und da L eine A-Struktur sein sollte, so ist $\operatorname{Ann} \tau_L \in \mathscr{C}(A)$. Angenommen, es sei $\operatorname{Ann} \tau_L \neq \mathbf{0}$. Da $\operatorname{Ann} \tau_M = \mathbf{0}$, so ist gewiß $\operatorname{Ann} \tau_L \nsubseteq \operatorname{Ann} \tau_M$, und aus (8.3.2) folgt $|FM| = 1$ und $L \subseteq FM$, im Widerspruch zu $|L| \neq 1$. Daher ist $\operatorname{Ann} \tau_L = \mathbf{0}$, d. h., L ist eine treue A-Struktur. Mit M gehört auch die Teilalgebra L von M zu M. Wegen $A\tau_L \subseteq E(M)$ ist $A\,\tau_L$ (bez. geeigneter Verknüpfungen) $\in \mathfrak{K}^1$. Da L nach Voraussetzung prim ist und nur triviale A-Teilstrukturen besitzt, so sind (8.4.1) (wegen (8.3.1)) und (8.4.2) erfüllt, d. h., L ist in der Tat irreduzibel.

9. Auch die in [8] begründete Strukturtheorie der Halbgruppen, der das $\mathfrak{K}$-Schema $\Sigma^{(2\mathfrak{K})}$ zugrundeliegt, ist als eine spezielle Illustration zu der vorstehenden Theorie anzusehen ($\mathfrak{K}^0$ die Klasse aller Halbgruppen, $\mathfrak{M}$ die Klasse aller Mengen, $\mathfrak{K}$ besteht aus allen Teilhalbgruppen von Transformationshalbgruppen von Mengen). Wir erwähnen hier nur andeutungsweise einige Resultate aus [8].

Analog den Struktursätzen über primitive Ringe lassen sich die (in Bezug auf $\mathfrak{K}$) primitiven Halbgruppen mit irreduziblen, von einem Idempotent erzeugten Rechtsidealen charakterisieren. Dabei spielt das folgende Theorem eine Rolle, dessen Teil 9.1.a) eine ähnliche Bedeutung wie das Schursche Lemma besitzt.

Es sei $O(S)$ die Menge der linksseitigen Nullelemente einer Halbgruppe S.

9.1. Für ein Idempotent e von S gilt:

a) Wenn das Rechtsideal $M = eS$ irreduzibel ist, so hat man

(9.1.1) eSe ist eine Gruppe oder Gruppe mit Null und $e \notin O(S)$; ferner $eSe = \{e\}$ oder $O(eSe) = eSe \cap O(S)$.

b) Wir lassen zu, daß $O(S)$ leer oder nichtleer ist. Im letzteren Fall fordern wir aber, daß die Reessche Differenzhalbgruppe $S/O(S)$ keine nilpotenten Ideale (abgesehen vom Nullideal) hat. Dann folgt umgekehrt aus (9.1.1) die Irreduzibilität von eS (als S-System).

9.2. Nach einem Resultat aus [9] läßt sich das $\Sigma^{(2\mathfrak{K})}$-Radikal $R(\Sigma^{(2\mathfrak{K})}, S)$ so charakterisieren: $(a, b) \in R(\Sigma^{(2\mathfrak{K})}, S)$ dann und nur dann, wenn zu gegebenem $s \in S^1$ $(= S \cup \{1\}$, die um 1 erweiterte Halbgruppe mit Eins) eine Zahl $n \geq 0$ existiert, so daß $\{(as)^n, (bs)^n\}\ (a, b) \subseteq \mathbf{0}$, d. h.,

(9.2.1) $$(as)^n a = (as)^n b, \qquad (bs)^n a = (bs)^n b.$$

10. In [9] wurde auch gezeigt, daß sich die Baer-McCoy-Levitzkische Theorie der Radikalideale in Ringen auf Kongruenzen einer Halbgruppe S übertragen läßt. Es soll jetzt nachgewiesen werden, daß das $\Sigma^{(1\mathfrak{K})}$-Radikal $R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, S)$ mit dem in [9] eingeführten unteren Radikal $L(S)$ identisch ist.

10.1. $U = U(S)$, das obere Radikal [9], ist einfach das $\Sigma^{(2\mathfrak{K})}$-Radikal $R(\Sigma^{(2\mathfrak{K})}, S)$. Ferner sei $V = V(S)$ die Kongruenz in S, die so erklärt ist: $(a, b) \in V \Leftrightarrow$ *Es existiert* $n \geqslant 0$, *so daß*

$$\{(aS^1)^n \cup (bS^1)^n\}(a, b) \subseteq \mathbf{0}.$$

10.2. Eine Kongruenz $C \in \mathscr{C}(S)$ heißt ein (U, V)-*Radikal* von S, falls $C \subseteq U$ und zugleich $V(S/C) = \mathbf{0}$. Im Gegensatz zu U ist V im allgemeinen kein (U, V)-Radikal. Doch es gilt [9]:

10.3. Der Durchschnitt aller (U, V)-Radikale ist wieder ein (U, V)-Radikal, das untere Radikal $L = L(S)$.

10.4. Eine Kongruenz $P \in \mathscr{C}(S)$ heißt *Primkongruenz*, wenn für alle Ideale A von S und alle $B \in \mathscr{C}(S)$ gilt: Aus $AB \subseteq P$ folgt $A \subseteq P^0$ oder $B \subseteq P$ (2).

Hierin bezeichnet P^0 diejenige P-Klasse, die zugleich ein Ideal von S ist; wenn eine solche P-Klasse nicht existiert, sei $P^0 = \emptyset$.

10.5. Das untere Radikal $L(S)$ ist der Durchschnitt aller Primkongruenzen von S [9].

Analog der Situation in Ringen [1] gilt nun auch

10.6. Das untere Radikal $L(S)$ ist identisch mit dem $\Sigma^{(1\mathfrak{K})}$-Radikal $R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, S)$.

Zuerst bemerken wir

10.6.1. Die Halbgruppe S ist dann und nur dann in Bezug auf $\mathfrak{K}$ prim (im Sinne der Definition 8.6), wenn $\mathbf{0}$ eine Primkongruenz in S (Definition 10.4) und $|S| \neq 1$ ist.

Beweis von 10.6.1. Sei $\mathbf{0}$ eine Primkongruenz und $|S| \neq 1$. Betrachtet man S selbst als S-System, $M = S$, so ist M treu. Denn bezeichnet $B = \operatorname{Ann} \tau_M$ den Annullator der durch $M = S$ erzeugten Darstellung τ_M, so gilt $MB \subseteq \mathbf{0}_M$. Nach Voraussetzung ist $\mathbf{0}_S$ Primkongruenz und $S \nsubseteq \mathbf{0}_S^0$ (wegen $|S| \neq 1$), folglich $B \subseteq \mathbf{0}_S$. Ferner gilt $|FM| \leqslant 1$. Denn für $a \in FM$; $x, y \in S$ und $S^1 = S \cup \{1\}$ hat man $aS^1\mathbf{1}_S \subseteq \mathbf{0}_S$, also auch $S^1aS^1\mathbf{1}_S \subseteq \mathbf{0}_S$ und (wegen $\mathbf{1}_S \neq \mathbf{0}_S$) $a \in \mathbf{0}_S^0$. Nachweis von (8.3.1): Wäre $MS \subseteq FM$ $(M = S)$, so wäre $S\mathbf{1} \subseteq \mathbf{0}$, was sofort auf einen Widerspruch führt. Nachweis von (8.3.2): Wenn nun $xB \subseteq \mathbf{0}$ für $x \in S = M, \notin FM$, so $YB \subseteq \mathbf{0}$, wo Y das x umfassende Ideal $\mathbf{0}B^{-1} = \{y \mid y \in S, yB \subseteq \mathbf{0}\}$ von S ist. Da $Y \nsubseteq \mathbf{0}^0$ (wegen $x \notin FM$), so ist $B \subseteq \mathbf{0}$. Daher ist $M = S$ ein primes S-System.

(2) Vgl. [9]. Für Halbgruppen mit Eins stimmt dieser Begriff mit dem Begriff der Primkongruenz im Sinne von K. Drbohlav [3] überein.

Möge umgekehrt ein treues primes S-System M vorhanden sein. Wenn A ein Ideal von S und $B \in \mathscr{C}(S)$, so daß $AB \subseteq \mathbf{0}$, $A \nsubseteq \mathbf{0}^0$, so ist zu zeigen, daß $B \subseteq \mathbf{0}$. Sei $x \in M$, $\notin FM$ (nach (8.3.1) gibt es ein solches x). Dann ist $xA \nsubseteq FM$. Denn aus $xA \subseteq FM$ folgt $x\langle A\rangle \subseteq \mathbf{0}$, wo $\langle A\rangle = \mathbf{1}_A \cup \cup\, \mathbf{0}_S \in \mathscr{C}(S)$ ist. Da M treues primes S-System ist, wäre $\langle A\rangle \subseteq \operatorname{Ann}\tau_M = \mathbf{0}$ und $A \subseteq \mathbf{0}^0$, was der Voraussetzung widerspricht. Sei $y = xa \in xA$, $\notin FM$, wo $a \in A$. Dann ist $yB = xaB \subseteq xAB = \mathbf{0}$, somit $B \subseteq \operatorname{Ann}\tau_M = \mathbf{0}$.

Beweis von 10.6. Wir haben $R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, S) = \bigcap \operatorname{Ann}\Sigma^{(1\mathfrak{K})}$ und $L(S) = \bigcap \Pi$ $(= \bigcap_{P \in \Pi} P$; Π die Menge aller Primkongruenzen in S). Da $S/\operatorname{Ann}\varphi \simeq \simeq S\varphi$ für $\varphi \in \Sigma_S^{(1\mathfrak{K})}$ eine prime Halbgruppe ist ($\Sigma_{S\varphi}^{(1\mathfrak{K})}$ enthält den Isomorphismus $\varphi^{-1}\varphi$), so ist $\operatorname{Ann}\varphi$ zufolge 10.6.1 eine Primkongruenz in S, d. h. $L(S) \subseteq R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, S)$. Diese Enthaltenseinsbeziehung ist trivialerweise auch für $\Sigma_S^{(1\mathfrak{K})} = \emptyset$ richtig, da dann $R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, S) = \mathbf{1}$. Umgekehrt sei P eine Primkongruenz in S. Für $P \neq \mathbf{1}$ ist $S/P = S\chi$ eine Primhalbgruppe, d. h., es existiert ein Isomorphismus $\psi \in \Sigma_{S\chi}^{(1\mathfrak{K})}$. Demnach hat P die Gestalt

$$P = \operatorname{Ann}\chi\psi = \operatorname{Ann}\varphi, \qquad \varphi = \chi\psi \in \Sigma_S^{(1\mathfrak{K})}.$$

Es ist also auch $R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, S) \subseteq L(S)$ (und zwar gilt dies trivialerweise auch dann, wenn nur $P = \mathbf{1}$ eine Primkongruenz in S ist); somit besteht Gleichheit, q. e. d.

11. Als ein weiteres Beispiel zum Abschnitt 8 betrachten wir in diesem Abschnitt die Klasse $\mathfrak{K}^0$ aller Gruppen und wählen für $\mathfrak{M}$ die Klasse aller Mengen. $\mathfrak{E}(M)$ ist dann die Halbgruppe aller Transformationen von $M \in \mathfrak{M}$; die Klassen $\mathfrak{K}^1$ und $\mathfrak{K}^2$ sind wie in 8.1 und 8.7 definiert.

11.1. $\mathfrak{K}^3$ sei die Klasse aller Gruppen G, die folgenden Bedingungen genügen:

(11.1.1) $G \in \mathfrak{K}^2$.

(11.1.2) Aus $M \in \mathfrak{M}$, $G \subseteq \mathfrak{E}(M)$ folgt $|FM| \leqslant 1$; d. h., M besitzt höchstens ein Fixelement f bez. G.

(11.1.3) Aus $M \in \mathfrak{M}$, $G \subseteq \mathfrak{E}(M)$, $x \in M$, $b \in G$ und $xb = f \in FM$ folgt $x(ab) = xa$ für alle $a \in G$.

(11.1.4) Aus $M \in \mathfrak{M}$, $G \subseteq \mathfrak{E}(M)$, $a \in G$, $B \prec G$ (d. h., B ist Normalteiler von G) und $[a, B] = \{e\}$ mit e als dem Einselement von G (d. h., B liegt im Zentralisator von a in G (³)) folgt $(xa)B = x[a, B]$ für alle $x \in M$ (⁴).

(³) Für zwei Teilmengen A und B der Gruppe G bezeichnet $[A, B]$ die Menge aller Elemente der Form $aba^{-1}b^{-1}$ $(a \in A, b \in B)$.

(⁴) Die Schreibung $(xa)B = x[a, B]$ soll deutlichmachen, daß es sich hierbei um eine schwache Form des (von den Darstellungsmoduln her bekannten) durchlaufenden Assoziativgesetzes handelt.

11.2. Wir geben einige unmittelbare Folgerungen an.

Aus (11.1.4) folgt $Me = FM$; wegen (11.1.2) ist also:

(11.2.1) $$|FM| = 1.$$

Mit Rücksicht auf die Bedingungen (11.1.2)-(11.1.4) läßt sich (8.7.2) in der folgenden Form schreiben:

(11.2.2) Wenn $M \in \mathfrak{M}$, $G \subseteq \mathfrak{E}(M)$, $x \in M$, $B \prec G$ und $xB = \{f\}$ $(f \in FM)$, so ist $(xG)B = xB$.

Unter Beachtung von (11.1.3) ergibt sich ferner:

Für eine G-Struktur M mit $G\tau_M \in \mathfrak{K}^3$ ist (8.3.2) gleichbedeutend mit

(11.2.3) Aus $x \in M$, $B \prec G$, $xB = \{f\} = FM$ und $MB \nsubseteq \{f\}$ folgt stets $x = f$.

Es ist leicht einzusehen, daß sich die Bedingung $G\tau_M \in \mathfrak{K}^3$ auch direkt durch diejenigen Bedingungen für die G-Struktur M beschreiben läßt, die den Bedingungen (11.1.1)-(11.1.4) genau entsprechen. Auch (11.2.2) ist in dieser Weise ausdrückbar. Man hat einfach überall die Voraussetzung $G \subseteq \mathfrak{E}(M)$ wegzulassen. Nur die zu (11.1.4) (mit $G\tau_M$ anstatt G) entsprechende Bedingung unterscheidet sich darüberhinaus noch an einer Stelle von (11.1.4) und lautet so:

(11.2.4) Aus $B \prec G$ und $[a, B] \subseteq (\mathrm{Ann}\,\tau_M)^{\prec}$ folgt $(xa)B = x[a, B]$ für alle $x \in M$.

Hierbei verwenden wir das Symbol $C^{\prec}$ für eine Kongruenz C in G zur Bezeichnung des zu C gehörigen Normalteilers von G.

11.3. Wir setzen $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^3$ und werden nachweisen, daß das $\Sigma^{(1\mathfrak{K})}$-Radikal einer Gruppe G zusammenfällt mit derjenigen, hier vorübergehend mit $L(G)$ bezeichneten Kongruenz in G, die zu dem in [16] untersuchten Radikal $R = R(G)$ von G gehört $(R \prec G)$.

11.4. Ein von G verschiedener Normalteiler (5) P von G heißt *prim*, wenn aus $A \prec G$, $B \prec G$ und $[A, B] \subseteq P$ stets folgt $A \subseteq P$ oder $B \subseteq P$ (vgl. [14]-[16]).

11.5. $L(G)^{\prec}$ ist definiert als der Durchschnitt aller primen Normalteiler von G (vgl. [15], [16]).

Wir behaupten

(11.6) $$R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, G) = L(G).$$

Der Beweis dieser Beziehung verläuft ähnlich wie der Beweis von 10.6. Zuerst beweisen wir

(5) Wir setzen $P \neq G$ voraus, um in Übereinstimmung mit [16] zu bleiben.

11.6.1. Die Gruppe G ist dann und nur dann prim in Bezug auf $\mathfrak{K}$ (im Sinne der Definition 8.6), wenn $\{e\}$ ein primer Normalteiler von G ist.

Es sei $\{e\}$ ein primer Normalteiler von G und folglich $G \neq \{e\}$. Mit der äußeren Verknüpfung $(x, a) \to [x, a]$ $(a, x \in G)$ ist $M = G$ eine treue prime G-Struktur. Ist nämlich τ die zugehörige Abbildung $a \to a\tau$ (mit $a\tau$: $x \to [x, a]$), so folgt aus $a, b \in G$ und $[x, a] = [x, b]$ für alle $x \in G$, daß $a^{-1}b$ zum Zentrum Z von G gehört. Wegen $[G, Z] \subseteq \{e\}$ und $G \neq \{e\}$ muß sein $Z = \{e\}$, d. h. $a = b$ und $\operatorname{Ann} \tau = \mathbf{0}$. Demnach ist $M = G$ eine treue G-Struktur. Aus $[x, a] = x$ folgt $x = e$, somit $FM = \{e\}$. Wäre $[G, G] = \{e\}$, so wäre $G = Z = \{e\}$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist (8.3.1) erfüllt. Führt man in der Menge G eine Verknüpfung ein, so daß τ ein Isomorphismus von G auf $G\tau$ wird, so kann man leicht nachrechnen, daß $G\tau \in \mathfrak{K}$. Daher ist (8.3.2) gleichbedeutend mit (11.2.3). Es sei $x \in M = G$, $B \prec G$, $[x, B] = \{e\}$ und $[G, B] \nsubseteq \{e\}$, also ist auch $B \neq \{e\}$. Bezeichnet Z_B den Zentralisator von B in G und beachtet man, daß der Einheitsnormalteiler $\{e\}$ prim sein soll, so erhält man aus $[Z_B, B] = \{e\}$ die Gleichungen $Z_B = \{e\}$ und (wegen $x \in Z_B$) $x = e$, d. h., (11.2.3) ist erfüllt. Folglich ist G prim in Bezug auf $\mathfrak{K}$.

Umgekehrt sei G prim in Bezug aug $\mathfrak{K}$ und M eine treue prime G-Struktur, so daß $G\tau_M$ (als Gruppe) $\in \mathfrak{K}$. Wir haben zu zeigen, daß $\{e\}$ prim ist. Sei $A \prec G$, $B \prec G$ und $[A, B] = \{e\}$. Gemäß (11.1.4) ist $(MA)B = \{f\}$. In Verbindung mit (11.2.3) folgt $MA = \{f\}$ oder $MB = \{f\}$. Da M treu sein sollte, muß $A = \{e\}$ oder $B = \{e\}$ sein, q. e. d.

Auf Grund von 11.6.1 kann nun der Beweis von (11.6) wie derjenige von 10.6 leicht zum Abschluß gebracht werden.

Es ist eine offene Frage, ob auch das $\Sigma^{(2\mathfrak{K})}$-Radikal von G mit einem der bekannten Radikale ([6]) der Gruppe G zusammenfällt **(P 536)**. In dieser Hinsicht ist folgender Satz von Interesse:

11.7. Es sei G eine Gruppe, die als G-Struktur Artinsch ist, d. h., es gelte die Minimalbedingung für die G-Teilstrukturen von $M = G$. Dann ist

$$R(\Sigma^{(1\mathfrak{K})}, G) = R(\Sigma^{(2\mathfrak{K})}, G). \tag{11.7.1}$$

Diese Beziehung folgt unmittelbar aus

11.8. Es sei G eine Gruppe mit minimalen von $\{e\}$ verschiedenen G-Teilstrukturen. In Bezug auf $\mathfrak{K}$ ist G genau dann prim, wenn es primitiv ist.

Beweis. Da $\Sigma^{(2\mathfrak{K})} \supseteq \Sigma^{(2\mathfrak{K})}$, so haben wir nur noch folgendes zu zeigen: Es sei G eine in Bezug auf $\mathfrak{K}$ prime Gruppe. Als G-Struktur besitze $M = G$ eine minimale von $\{e\}$ verschiedene G-Teilstruktur L. Dann ist G in Bezug

([6]) Vgl. [11]-[13], [17] und [18] sowie die dort zitierte Literatur.

auf $\mathfrak{K}$ primitiv (8.6). Wir wissen bereits, daß $M = G$ als G-Struktur treu und prim ist (vgl. den Beweis von 11.6.1). Sei N die von L erzeugte Untergruppe von G. Offenbar ist $N \prec G$, und aus $L \operatorname{Ann} \tau_L \subseteq \mathbf{0}$ folgt $N \operatorname{Ann} \tau_L \subseteq \mathbf{0}$ und $\operatorname{Ann} \tau_L \subseteq \operatorname{Ann} \tau_N$. Wegen $L \subseteq N$ ist $\operatorname{Ann} \tau_N \subseteq \operatorname{Ann} \tau_L$, somit besteht Gleichheit, $\operatorname{Ann} \tau_L = \operatorname{Ann} \tau_N$. Das besagt aber, daß $\operatorname{Ann} \tau_L$ eine Kongruenz in G sein muß. Daher ist L eine G-Struktur. Zufolge 8.10 ist L treu und irreduzibel. Wie man leicht nachrechnet, ist auch $G\tau_L \in \mathfrak{K}$; demnach ist G in Bezug auf $\mathfrak{K}$ primitiv.

Zufolge 11.6.1 stimmen die in Bezug auf $\mathfrak{K}$ primen Gruppen mit den primen Gruppen im Sinne von Ščukin [16] überein. Aus 11.8 ergibt sich daher als Korollar

11.8.1. Es sei G eine Gruppe mit minimalen von $\{e\}$ verschiedenen G-Teilstrukturen. G ist genau dann prim im Sinne von Ščukin, wenn es primitiv in Bezug auf $\mathfrak{K}$ ist.

Mit diesem Satz ist auch die entsprechende Frage im Fall endlicher Gruppen, die von mir am Schluß meines Warschauer Vortrages aufgeworfen wurde, positiv beantwortet.

Die Resultate dieses Abschnitts 11 haben ihren Ursprung in der folgenden Feststellung, die ich Herrn B. H. Neumann verdanke (vgl. auch [16], p. 1026, Beweis von Lemma 3): Ist G eine prime Gruppe im Sinne von Ščukin mit einer minimalen von $\{e\}$ verschiedenen G-Teilstruktur L (etwa eine endliche prime Gruppe G), so ist G monolithisch (Def. zum Beisp. in [4]) mit dem von L erzeugten Normalteiler N als nichtabelschem Monolith.

11.9. Wir erwähnen noch folgende offene Fragen, die den hier verwendeten Darstellungsbegriff für Gruppen betreffen.

11.9.1. Es seien G und G' zwei Gruppen aus $\mathfrak{K}$, welche als Mengen identisch sind. Stimmen dann auch die Verknüpfungen von G und G' überein? **(P 537)**

Falls die Antwort hierauf positiv ausfallen sollte, lautet die nächste Frage:

11.9.2. Es sei M eine feste Menge und $\mathfrak{K}(M)$ die Menge aller $G \in \mathfrak{K}$ mit $G \subseteq \mathfrak{E}(M)$. Existiert dann eine maximale Gruppe $G(M) \in \mathfrak{K}(M)$, so daß G Untergruppe von $G(M)$ für alle $G \in \mathfrak{K}(M)$ ist? **(P 538)**

Im Beweis von 11.8 wurde gezeigt, daß die minimale von $\{e\}$ verschiedene G-Teilstruktur L eine G-Struktur ist, mit $L \subseteq N$.

11.9.3. (B. H. Neumann) Ist hierbei sogar $L = N$?

11.9.4. Ist eine G-Teilstruktur L einer beliebigen Gruppe G stets eine G-Struktur **(P 539)**? Für $L \prec G$ ist dies natürlich der Fall.

11.9.5. Ist in 11.9.4 sogar $L \prec G$? **(P 540)**

12. In diesem Abschnitt wollen wir die mit den Darstellungen verbundenen Kongruenzen untersuchen. Für ein allgemeines Schema Σ von Darstellungen setzen wir $\operatorname{Ann}\Sigma = \{\operatorname{Ann}\Sigma_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$.

Nun sei umgekehrt Δ eine Klasse der Form $\Delta = \{\Delta_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$, wobei $\Delta_A \subseteq \mathscr{C}(A)$.

12.1. Die Klasse Δ heißt *darstellbar*, wenn ein allgemeines Schema von Darstellungen $\Sigma \in \mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$ existiert, so daß $\Delta = \operatorname{Ann}\Sigma$.

Die Gesamtheit der darstellbaren Klassen sei $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$. Die Elemente von $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ lassen sich auch unabhängig von $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$ charakterisieren:

12.2. Die Klasse Δ ist genau dann darstellbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

Es sei $C \in \mathscr{C}(A)$ und γ ein Homomorphismus von $A \in \mathfrak{K}^0$ mit $\operatorname{Ann}\chi \subseteq C$.

(12.2.1) $$C\chi \in \Delta_{A\chi} \Rightarrow C \in \Delta_A.$$

(12.2.2) $$C \in \Delta_A \Rightarrow C\chi \in \Delta_{A\chi}.$$

(12.2.3) $$\mathbf{1}_A \notin \Delta_A.$$

Man beachte hierbei, daß $C\chi \in \mathscr{C}(A\chi)$, falls $\operatorname{Ann}\chi \subseteq C \in \mathscr{C}(A)$.

Beweis von 12.2. Ist Δ eine Klasse, die den Bedingungen (12.2.1) bis (12.2.3) genügt, so setze man $\Sigma_A = \{\varphi \mid \varphi$ durchläuft alle Homomorphismen von A mit $\operatorname{Ann}\varphi \in \Delta_A\}$. Dann ist $\Sigma(\Delta) = \{\Sigma_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\} \in \mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$, und es gilt $\operatorname{Ann}\Sigma(\Delta) = \Delta$. Demnach ist $\Sigma \to \Sigma(\Delta)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ in $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$.

12.3. Führt man in $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ Verknüpfungen $(\vee, \wedge)$ ein gemäß

$$\Delta \vee \Delta' = \{\Delta_A \cup \Delta'_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\},$$
$$\Delta \wedge \Delta' = \{\Delta_A \cap \Delta'_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\},$$

so wird die Abbildung $\Sigma \to \operatorname{Ann}\Sigma$ zu einem Homomorphismus von $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$ auf $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$. Folglich ist $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ ein distributiver vollständiger Verband.

12.4. Für ein gegebenes R-Radikal sei D eine Kollektion von Klassen Δ, so daß

(12.4.1) $$\Delta \in \mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$$

und

(12.4.2) $$\bigcap \Delta_A \; (= \bigcap_{C \in \Delta_A} C) = R(A).$$

Falls $D \neq \emptyset$ ist, so ist auch $\bigvee D = \{\bigcup_{\Delta \in D} \Delta_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ eine den Bedingungen (12.4.1) und (12.4.2) genügende Klasse. Ist insbesondere Σ das im Beweis von 7.3 konstruierte $\mathfrak{K}$-Schema, so ist $\operatorname{Ann}\Sigma$ das maximale Element in der Gesamtheit $\mathscr{D}(R, \mathfrak{K}^0)$ aller Klassen Δ, mit den Bedingungen (12.4.1), (12.4.2). $\mathscr{D}(R, \mathfrak{K}^0)$ ist bezüglich der aus $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ übernommenen

Inklusion eine Halbordnung. Da aber $\bigvee D$ für $D = \emptyset$ nicht notwendig zu $\mathscr{D}(R, \mathfrak{K}^0)$ gehört, so ist $\mathscr{D}(R, \mathfrak{K}^0)$ im allgemeinen kein vollständiger $\vee$-Teilbund [5] von $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$. Dennoch kann es eintreten, daß $\mathscr{D}(R, \mathfrak{K}^0)$ ein vollständiger Verband wird, wenn nämlich das in $\mathscr{D}(R, \mathfrak{K}^0)$ minimale Element existiert (das im allgemeinen nicht mit dem minimalen Element von $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ zusammenfällt). Das tritt beispielsweise ein, wenn $\mathfrak{K}^0$ die Klasse aller rechts Artinschen Ringe, $\mathfrak{K}$ die Klasse aller Endomorphismenteilringe von Moduln und $R(A)$ die zum Jacobsonschen Radikal von A gehörige Kongruenz ist. Für die Klasse Σ aller irreduziblen Darstellungen [10] ist dann $\operatorname{Ann}\Sigma$ minimal in $\mathscr{D}(R, \mathfrak{K}^0)$.

Definiert $R = \{R(A) \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ in $\mathfrak{K}^0$ ein R-Radikal und bezeichnet $\mathscr{R}(\mathfrak{K}^0)$ die Gesamtheit aller R, so ist $\mathscr{D}(R. \mathfrak{K}^0)$ gerade ein volles Urbild bei der durch (12.4.2) definierten Abbildung $\Delta \to R$ von $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ auf $\mathscr{R}(\mathfrak{K}^0)$. (Zufolge 7.3 für $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^0$ ist $\Delta \to R$ tatsächlich eine Abbildung auf $\mathscr{R}(\mathfrak{K}^0)$). Ist D eine Kollektion von Klassen $\Delta \in \mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ und bezeichnet man die rechte Seite von (12.4.2) mit $R(\Delta, A)$ und setzt $R(\Delta) = \{R(\Delta, A) \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$, so wird $\bigvee D \to \bigwedge_{\Delta \in D} R(\Delta) = \{\bigcap_{\Delta \in D} R(\Delta, A) \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$. Ferner gilt $R(\Delta) \leqslant R(\bigwedge D)$, $\bigwedge D = \{\bigcap_{\Delta \in D} \Delta_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$, für alle $\Delta \in D$; dabei ist $R \leqslant R'$ erklärt durch $R(A) \subseteq R'(A)$ für alle $A \in \mathfrak{K}^0$. $\leqslant$ ist eine Teilordnungsbeziehung in $\mathscr{R}(\mathrm{K}^0)$, und aus den vorstehenden Bemerkungen folgt

12.5. $\mathscr{R}(\mathfrak{K}^0)$ ist ein (in gewissem Sinne vollständiger) Verband. Allgemeiner gilt dies auch für die Gesamtheit $\mathscr{R}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}^0)$ aller $R \in \mathscr{R}(\mathfrak{K}^0)$, für welche eine $\mathfrak{K}$-darstellbare Klasse Δ existiert (Definition 12.6), so daß $\Delta \to R$. Unter gewissen Voraussetzungen über $\mathfrak{K}$ (vgl. 7.3 und 12.7) ist $\mathscr{R}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}^0) = \mathscr{R}(\mathfrak{K}^0)$.

Als eine Verfeinerung von 12.1 wollen wir noch folgenden Begriff betrachten.

12.6. Die Klasse Δ heiße *$\mathfrak{K}$-darstellbar*, wenn ein $\mathfrak{K}$-Schema $\Sigma \in \mathscr{S}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}^0)$ existiert, so daß $\Delta = \operatorname{Ann}\Sigma$.

Ist 12.6 eine echte Verfeinerung von 12.1? Hierüber gibt Auskunft der Satz

12.7. Die Klasse $\mathfrak{K}$ möge folgender Bedingung genügen:

(12.7.1) Aus $\bigcap \Delta_A = \mathbf{0}$ folgt die Existenz einer zu $A \in \mathfrak{K}^0$ isomorphen Algebra $A^* \in \mathfrak{K}$.

Unter dieser Voraussetzung ist die Klasse Δ (genau dann) $\mathfrak{K}$-darstellbar, wenn sie darstellbar ist.

B e w e i s. Es sei Σ ein allgemeines Schema von Darstellungen mit $\Delta = \operatorname{Ann}\Sigma$. Sei Σ'_A die Klasse aller Homomorphismen der Form $\varphi\varphi^*$, wobei $\varphi \in \Sigma_A$ und φ^* ein Isomorphismus mit $\varphi\varphi^* \in T_A^-$ (Definition in Abschnitt 5) ist. Dann ist $\Sigma' = \{\Sigma'_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\} \in \mathscr{S}_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}^0)$ und $\operatorname{Ann}\Sigma' = \operatorname{Ann}\Sigma$.

13. Anstelle der Schemata $\Sigma \in \mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$ kann man allgemeiner solche Schemata $\Sigma = \{\Sigma_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ bzw. Klassen $\Delta = \{\Delta_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$ betrachten, bei denen die Klassen Σ_A bzw. die Mengen Δ_A nur der Bedingung (3.2.1) (ohne Beschränkung auf Nicht-Nullhomomorphismen) bzw. (12.2.1) unterworfen sind. Man erhält dann wieder einen Verband $\tilde{\mathscr{S}}(\mathfrak{K}^0)$ bzw. $\tilde{\mathscr{D}}(\mathfrak{K}^0)$. Diese Verbände werden zu (nicht-kommutativen) Halbgruppen, wenn man folgende Verknüpfungen einführt:

$$\Sigma \circ \Sigma' = \{(\Sigma \circ \Sigma')_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$$

für

$$(\Sigma \circ \Sigma')_A = \{\varphi\varphi' \mid \varphi \in \Sigma_A \quad \text{und} \quad \varphi' \in \Sigma'_{A\varphi}\}$$

bzw.

$$\Delta \circ \Delta' = \{(\Delta \circ \Delta')_A \mid A \in \mathfrak{K}^0\}$$

für $(\Delta \circ \Delta')_A = \{C \mid C \in \mathscr{C}(A);\ \exists B \in \Delta_A, \text{ so daß } B \subseteq C \text{ und } C/B \in \Delta'_{A/B}\}$.

In $\tilde{\mathscr{D}}(\mathfrak{K}^0)$ gelten die Regeln

$$\Delta \circ \Delta' \leqslant \Delta';$$

$$\text{wenn } \Delta \leqslant \Delta', \text{ so } \Delta \circ \Delta'' \leqslant \Delta' \circ \Delta'' \text{ und } \Delta'' \circ \Delta' \leqslant \Delta'' \circ \Delta,$$

sowie

$$\Delta \circ \Delta = \Delta.$$

Entsprechende Regeln gelten in $\tilde{\mathscr{S}}(\mathfrak{K}^0)$.

Bezüglich der oben erklärten Verknüpfungen sind $\mathscr{S}(\mathfrak{K}^0)$ und $\mathscr{D}(\mathfrak{K}^0)$ im allgemeinen nicht multiplikativ abgeschlossen.

LITERATURNACHWEIS

[1] В. А. Андрунакиевич, *Первые модули и радикал Бэра*, Сибирский Математический Журнал 2 (1961), S. 801-806.

[2] В. А. Андрунакиевич, И. М. Рябухин, *Модули и радикалы*, Доклады Академии Наук СССР 156 (1964), S. 991-994.

[3] K. Drbohlaw, *Zur Theorie der Kongruenzrelationen auf kommutativen Halbgruppen*, Mathematische Nachrichten 26 (1963/64), S. 233-245.

[4] P. Hall, *On the finiteness of certain soluble groups*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) 9 (1959), S. 595-622.

[5] H. Hermes, *Einführung in die Verbandstheorie*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[6] H.-J. Hoehnke, *Zur Strukturtheorie der Halbgruppen*, Mathematische Nachrichten 26 (1963/64), S. 1-13.

[7] — *Über antiautomorphe und involutorische primitive Halbgruppen*, Czechoslovak Mathematical Journal 15 (90) (1965), S. 50-63.

[8] — *Structure of semigroups*, Canadian Journal of Mathematics (im Druck).

[9] — *Über das untere und obere Radikal einer Halbgruppe*, Mathematische Zeitschrift 89 (1965), S. 300-311.

[10] N. Jacobson, *Structure of rings*, Providence, R. I., 1965.

[11] А. Т. Курош, *Радикалы в теории групп*, Доклады Академии Наук СССР 141 (1961), S. 789-791.

[12] — *Радикалы в теории групп*, Сибирский Математический Журнал 3 (1962), S. 912-931.

[13] Б. И. Плоткин, *Обобщенные разрешимые и обобщенные нилпотентные группы*, Успехи Математических Наук 13 выпуск 4 (1958), S. 89-172.

[14] E. Schenkmann, *The similarity between the properties of ideals in commutative rings and the properties of normal subgroups*, Proceedings of the American Mathematical Society 9 (1958), S. 375-381.

[15] К. К. Щукин, *ORJ*-разрешимом радикале групп*, Доклады Академии Наук СССР 132 (1960), S. 541-544.

[16] — *RJ*-разрешимый радикал групп*, Математический Сборник, новая серия 52 (94) (1960), S. 1021-1031.

[17] — *К теории радикалов в группах*, Доклады Академии Наук СССР 142 (1962), S. 1047-1049.

[18] — *К теории радикалов в группах*, Сибирский Математический Журнал 3 (1962), S. 932-942.

[19] K. Urbanik, *Representation theorem for Marczewski's algebras*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série Math., Astr. et Phys., 7 (1959), S. 617-619.

[20] — *A representation theorem for Marczewski's algebras*, Fundamenta Mathematicae 48 (1960), S. 147-167.

DEUTSCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN
FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT, INSTITUT FÜR REINE MATHEMATIK

Reçu par la Rédaction le 21. 11. 1964