COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIII 1965 FASC. 2

О РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СХОДИМОСТИ

В. З. ПОЛЯКОВ (МОСКВА)

Наряду с топологическими структурами известны также введенные Фреше [11] и Урысоном [10] структуры, основанные на понятии счетной сходимости, т. наз. L-пространства (иногда: пространства Фреше). В работе [2] А. Гёц определяет новый вид равномерных пространств (типа Фреше), названных им UL-пространствами и основанных на понятии сопредельности (1) любых двух счетных последовательностей; можно считать, что эти Гёцевы „пространства сопредельности" находятся в таком же отношении к пространствам близости [4], как обычные L-пространства — к топологическим.

В настоящей работе устанавливается связь между пространствами близости и UL-пространствами; при этом, в целях большей общности формулировок, рассматриваются пространства близости, в которых не обязательно выполнена аксиома Ефремовича Б5 (см. [8]). Оказывается, Гёцевы UL-пространства взаимно-однозначно соответствуют некоторому классу пространств близости, которые мы называем секвенциальными пространствами. В § 1 изучаются общие свойства секвенциальных пространств и находится их место в классе всех пространств близости. § 2 посвящен исследованию вопросов, связанных с полнотой и пополнениями UL-пространств.

§ 1. Равномерные пространства Фреше, или UL-пространства, предложены Гёцем в работе [2]. Детально изучаются т. наз. UL^*-пространства, удовлетворяющие аксиоме

vi. Если $\{x_i\}\bar{\mathbf{n}}\{y_i\}$ (2), то существуют подпоследовательности $\{x_{i_j}\}$ и $\{y_{i_j}\}$ такие, что любые их соответственные подпоследовательности $\{x_{i_{j_k}}\}$ и $\{y_{i_{j_k}}\}$ тоже не сопредельны.

---

(1) А. Гёц пишет „near". Мы не будем пользоваться этим термином во избежание смешения с близостью множеств по В. А. Ефремовичу.

(2) Знак $\bar{\mathbf{n}}$ означает, что соединенные им последовательности не сопредельны.

Эта аксиома представляет собой ослабленный вариант следующей леммы Ефремовича [5]:

Если в метрическом пространстве последовательности точек $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ не сопредельны (т. е. $\lim \varrho(x_i, y_i) \neq 0$), то существуют подпоследовательности $\{x_{i_j}\}$ и $\{y_{i_j}\}$, лежащие на положительном расстоянии.

Это делает оправданным введение следующей аксиомы:

$\Box$ Если $\{x_i\}\overline{\mathfrak{n}}\{y_i\}$, то существуют подпоследовательности $\{x_{i_j}\}$ и $\{y_{i_j}\}$ любые подпоследовательности которых (не обязательно соответственные) не сопредельны.

UL-пространство, удовлетворяющее аксиоме $\Box$, будем называть *$UL^{\Box}$-пространством* или просто *пространством сопредельности.*

Определение 1. Пусть $\mathfrak{R}$ — пространство сопредельности (удовлетворяющее аксиоме $\Box$). Через $\mathfrak{R}'$ будем обозначать пространство близости, в котором считается $A\ \delta\ B$ в том и только в том случае, если существуют сопредельные подпоследовательности $\xi \subset A$ и $\eta \subset B$.

Без труда проверяется, что в пространстве $\mathfrak{R}'$ выполнены аксиомы Б1-Б4 [8]; однако вместо аксиомы Б5 в этом пространстве выполнена более слабая аксиома

Б$\Box$. Если $\{x_i\}\delta\{y_i\}$, а $\{z_i\}$ — произвольная последовательность, то в ней существует подпоследовательность $\{z_{i_j}\}$, далекая по крайней мере от одной из последовательностей $\{x_{i_j}\}$ или $\{y_{i_j}\}$.

Близость $R = \mathfrak{R}'$ будем называть *близостью $UL^{\Box}$-пространства* $\mathfrak{R}$.

Предложение 1.1. *Отображение $f:\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ пространств сопредельности $\mathfrak{n}$-непрерывно* (3) *тогда и только тогда, когда отображение их близостей $f:\mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ δ-непрерывно.*

Определение 2. Пусть P — пространство близости, удовлетворяющее аксиомам Б1-Б4 и аксиоме Б$\Box$. Введем на этом множестве сопредельность P', полагая $\{x_i\}\mathfrak{n}\{y_i\}$ в том и только в том случае, когда для любой возрастающей последовательности натуральных чисел i_j имеет место $\{x_{i_j}\}\delta\{y_{i_j}\}$.

Можно проверить, что в пространстве P' выполнены все аксиомы Гёца i-v и аксиома $\Box$. Сопредельность $\mathfrak{P} = P'$ будем называть *совместимой* с пространством близости P.

Предложение 1.2. *Если отображение f: $P \to Q$ пространств близости δ-непрерывно, то отображение совместимых с ними пространств сопредельности $f:P' \to Q'$ $\mathfrak{n}$-непрерывно.*

Теорема 1. *Пространство сопредельности $\mathfrak{R}'' = (\mathfrak{R}')'$, совместимое с близостью $\mathfrak{R}'$ произвольного пространства сопредельности $\mathfrak{R}$, совпадает с $\mathfrak{R}$.*

(3) Гёц в [2] называет их равномерно непрерывными.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}\mathbf{n}\{y_i\}$ в $\mathfrak{R}$. Значит, по определению 1, всегда $\{x_{i_j}\}\delta\{y_{i_j}\}$ в $R = \mathfrak{R}'$, а следовательно $\{x_i\}\mathbf{N}\{y_i\}$ в смысле $R' = \mathfrak{R}''$. Наоборот, если $\{x_i\}\overline{\mathbf{n}}\{y_i\}$, то, в силу аксиомы $\square$, существуют подпоследовательности $\{x_{i_j}\}$ и $\{y_{i_j}\}$, никакие подпоследовательности которых не сопредельны, т. е. $\{x_{i_j}\}\bar{\delta}\{y_{i_j}\}$ в пространстве $\mathfrak{R}'$ (определение 2). Но это и означает, что последовательности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ не сопредельны в $\mathfrak{R}''$.

Таким образом, класс пространств сопредельности взаимно-однозначно соответствует некоторому подклассу пространств близости (удовлетворяющих аксиомам Б1-Б4 и аксиоме Б $\square$).

Определение 3. Пространство близости P называется *секвенциальным*, если оно эквиморфно (4) близости некоторого $UL^{\square}$-пространства: $P \simeq \mathfrak{R}'$.

(Очевидно, в этом случае просто-напросто $P = P''$).

Теорема 2. *Пусть P — произвольное пространство близости. Пространство близости P'' (т. е. близость из пространства сопредельности P', совместимого с данным пространством близости) является слабейшим секвенциальным пространством, уплотняющимся на P; если отображение $f: P \to Q$ δ-непрерывно, то и отображение $f: P'' \to Q''$ δ-непрерывно.*

Доказательство. Покажем, что $P'' > P$. В самом деле, если $A \ \bar{\delta} \ B$ смысле близости P, то все подпоследовательности $\xi \subset A$ и $\eta \subset B$ далеки, а значит — не сопредельны; поэтому $A \ \bar{\Delta} \ B$ в P''.

Допустим, Q — секвенциально и $P < Q$. Тогда $P' < Q$ (5) и $P'' < Q'' = Q$.

Вторая часть теоремы является очевидным следствием предложений 1.1 и 1.2.

Пространство P'' будем иазывать *секвенциальным пространством, совместимым с P.*

Иногда бывает полезным следующее предложение, аналогичное уже упоминавшейся лемме Ефремовича [5]:

Лемма 1. *Пусть P — пространство близости, удовлетворяющее аксиоме* Б5 [8]. *Последовательности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ точек этого пространства сопредельны тогда и только тогда, когда для произвольного (конечного) равномерного покрытия $\mathfrak{U}$* (см. [8]) *найдется такой номер k, что при $i > k$ всегда $x_i \in \mathrm{St}\{y_i, \mathfrak{U}\}$.*

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна: если $\{x_i\}\overline{\mathbf{n}}\{y_i\}$, то для некоторой последовательности i_j натураль-

(4) Т. е. близостно-изоморфно.

(5) Мы пишем $\mathfrak{R} < \mathfrak{S}$, если тождественное отображение e: $\mathfrak{S} \sim \mathfrak{R}$ $\mathbf{n}$-непрерывно.

ных чисел имеет место $\{x_{i_j}\}\delta\{y_{i_j}\}$; покрытие $\{P\setminus\{x_{i_j}\}; P\setminus\{y_{i_j}\}\}$ равномерно и для любого k найдется $i > k$.

Необходимость. Предположим, существует равномерное покрытие $\mathfrak{U}$ такое, что при любом k найдется $i > k$, для которого $x_i \in \mathrm{St}(y_i, \mathfrak{U})$. Допустим, вопреки утверждению леммы, $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ сопредельны, т. е. все их соответственные подпоследовательности близки. Образуем последовательности $\xi = \{v_j\}$ и $\eta = \{w_j\}$, где $v_j = x_{i_j}$ и $w_j = y_{i_j}$ таковы, что $x_{i_j} \notin \mathrm{St}(y_{i_j}, \mathfrak{U})$. Пусть $\mathfrak{B}$ — дважды звездно вписанное в $\mathfrak{U}$ равномерное покрытие. Рассмотрим $\xi_j' = \xi \frown \mathrm{St}(w_j, \mathfrak{B})$ и $\eta_j' = \{w_s | v_s \in \xi_j'\}$. Докажем, что $\xi_j' \frown \mathrm{St}(\eta_j', \mathfrak{B}) = \emptyset$. В самом деле, если предположить противное, существовали бы k и l, для которых $v_k, v_l \in \xi \frown \mathrm{St}(w_j, \mathfrak{B})$, а $w_l \in \mathrm{St}(v_k, \mathfrak{B})$. Следовательно $w_l \in \mathrm{St}(v_l, \mathfrak{B}^{**})$, вопреки тому, что $w_l \notin \mathrm{St}(v_l, \mathfrak{U})$ и $\mathfrak{B}^{**} < \mathfrak{U}$.

Итак $\xi_j'\bar{\delta}\eta_j'$ и, значит, в силу наших предположений, множества $\xi_j' = \xi \frown \mathrm{St}(w_j, \mathfrak{B})$ конечны; по той же причине конечны все множества $\eta_j'' = \eta \frown \mathrm{St}(v_j, \mathfrak{B})$ и $\xi_j'' = \{v_s | w_s \in \eta_j''\}$.

Построим по индукции последовательности $\{v_{j_s}\}$ и $\{w_{j_s}\}$:

$$v_{j_0} = v_0 \quad \text{и} \quad w_{j_0} = w_0;$$

$$v_{j_{s+1}} = \min\Big(\xi\setminus\bigcup_{k=0}^{s}(\xi_{j_k}' \smile \xi_{j_k}'')\Big) \quad \text{и} \quad w_{j_{s+1}} = \min\Big(\eta\setminus\bigcup_{k=0}^{s}(\eta_{j_k}' \smile \eta_{j_k}'')\Big).$$

Теперь $\{v_{j_s}\} \frown \mathrm{St}(\{w_{j_s}\}, \mathfrak{B}) = \emptyset$. Итак $\{v_{j_s}\}\bar{\delta}\{w_{j_s}\}$, т. е. $\xi \bar{\mathbf{n}} \eta$.

В работе [2] предлагается произведение $\mathbf{n}$-пространств, в котором две последовательности считаются сопредельными тогда и только тогда, когда все их координатные последовательности сопредельны. Легко убедиться, что произведение $UL^{\square}$-пространств снова является $UL^{\square}$-пространством; это позволяет ввести в рассмотрение умножение секвенциальных пространств, — мы будем обозначать его символом $\square$, чтобы отличить от близостного произведения (см. [6]), — называя *секвенциальным произведением* близость из произведения пространств сопредельности, совместимых с сомножителями.

Теорема 3. *Если пространства P и Q секвенциальны, то $P \times Q < P \square Q$.* (Теорема верна и для бесконечного числа сомножителей).

Доказательство. Пусть множества A и B, лежащие в произведении $P \times Q$, отделимы, т. е. существуют равномерные покрытия $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ сомножителей, для которых, если через $\mathfrak{Z}$ обозначить их декартово произведение, $A \frown \mathrm{St}(B, \mathfrak{Z}) = \emptyset$. Пусть $\{(x_i, y_i)\} \subset A$ и $\{(v_i, w_i)\} \subset B$ — произвольные последовательности в множествах A и B. При любом i, $(x_i, y_i) \notin \mathrm{St}((v_i, w_i), \mathfrak{Z})$, т. е. либо $x_i \notin \mathrm{St}(v_i, \mathfrak{A})$, либо $y_i \notin \mathrm{St}(w_i, \mathfrak{B})$. Значит в пространстве P (или в пространстве Q) есть сколь угодно большие индексы i, при которых $x_i \notin \mathrm{St}(v_i, \mathfrak{A})$ (соответственно $y_i \notin \mathrm{St}(w_i, \mathfrak{B})$).

По доказанной выше лемме последовательности $\{x_i\}$ и $\{v_i\}$ (или последовательности $\{y_i\}$ и $\{w_i\}$) не сопредельны.

Следствие 1. *Секвенциальные пространства близости, удовлетворяющие аксиоме* Б5, *правильны (т. е. среди совместимых с ними равномерных пространств есть наибольшее).*

Доказательство. Пусть пространство P секвенциально. Диагональ в произведении $P \square P$ совпадает, очевидно, с P (при каноническом отождествлении); $P \times P < P \square P$, поэтому диагональ в $P \times P$ и подавно совпадает с P. Этого достаточно ([6], теорема 4), чтобы пространство близости P было правильным.

Следствие 2. $P'' = P!''$ ($P!$ — поправление — см. [6], определение 3 — пространства P).

Теорема 4. *Секвенциальное пространство, совместимое с произведением пространств близости, удовлетворяющих аксиоме* Б5, *является $\square$-произведением секвенциальных пространств, совместимых с ними: $(P \times Q)'' = P'' \square Q''$.*

Доказательство. В силу теоремы 4, $P'' \times Q'' < P'' \square Q''$ и тем более $P \times Q < P'' \square Q''$. Пространство $P'' \square Q''$ секвенциально, и, следовательно, $(P \times Q)'' < P'' \square Q''$.

Проекции $\pi_1 : P \times Q \to P$ и $\pi_2 : P \times Q \to Q$ δ-непрерывны; значит, по теореме 1, δ-непрерывны $\pi_1 : (P \times Q)'' \to P''$ и $\pi_2 : (P \times Q)'' \to Q''$, а следовательно и их сочетание $e = (\pi_1, \pi_2) : (P \times Q)'' \to P'' \square Q''$. Но e есть тождественное отображение множества $P \times Q$, т. е. $(P \times Q)'' > P'' \square Q''$.

Теорема доказана.

Следствие 1. $(P \cdot Q)'' = P'' \square Q''$ *($P \cdot Q$ — близость из произведения бикомпактных расширений пространств P и Q).*

В самом деле, $(P \cdot Q)! = (P \times Q)!$ ([6], теорема 9); остается воспользоваться следствием 2 из теоремы 3.

Следствие 2. *Если P и Q секвенциальны, то* $(P \cdot Q)'' = (P \times Q)'' = P \square Q$.

Замечание. Все эти утверждения верны, разумеется, и для бесконечного числа сомножителей.

Следствие 3. *При умножении метрических пространств в конечном или счетном числе произведения $\times$ и $\square$ совпадают.*

Действительно, $\times$-произведение конечного или счетного числа метрических пространств метризуемо и, следовательно, секвенциально.

Секвенциальное произведение обладает, однако, и очень существенным недостатком: $\square$-произведение двух „классических" нормальных (т. е. удовлетворяющих аксиоме Б5) пространств близости может не удовлетворять этой аксиоме.

Пример. Пусть E^β — чеховская близость прямой (т. е. близость, порождаемая чеховским бикомпактным расширением βE). Пространство $E^\beta \square E^\beta$ не удовлетворяет аксиоме Б5.

В самом деле, пусть $N \subset E^\beta \times \{0\}$ — множество натуральных чисел, а $A = \{(x, y) | xy = 1\} \setminus N \times E$. Докажем, что $A \bar{\delta} N$ (в смысле близости $E^\beta \square E^\beta$). Предположим противное, т. е. допустим, что существуют сопредельные последовательности $\{(a_i, b_i)\} \subset A$ и $\{(c_i, 0)\} \subset N$. Тогда $\lim b_i = 0$ и, следовательно, $\lim a_i = \infty$. Выберем подпоследовательности $\{(a_{i_k}, b_{i_k})\}$ и $\{(c_{i_k}, 0)\}$ такие, что $a_{i_k}+1 < a_{i_{k+1}}$ и $c_{i_k}+1 < c_{i_{k+1}}$. Теперь множества $\{a_{i_k}|k\}$ и $\{c_{i_k}|k\}$ замкнуты в E и не пересекаются, поэтому они далеки в E^β и, таким образом, подпоследовательности $\{a_i\}$ и $\{c_i\}$ не сопредельны.

Итак $A \bar{\delta} N$. Очевидно, однако, что $[A] \delta N$. Это было б невозможно, если аксиома Б5 выполнялась.

Следствие 1. *Произведения $P \times Q$ и $P \square Q$ действительно могут не совпадать, даже если $P \times Q$ правильно (и значит, $\times$-произведение двух секвенциальных пространств близости может не быть секвенциальным).*

Следствие 2. *При переходе к совместимому с данным пространством близости P секвенциальному пространству P'' аксиома* Б5 *может не сохраняться.*

Следующая теорема дает характеристику секвенциальных пространств ([6]) в чисто близостных терминах (т. е. не используя понятие $UL^\square$-пространства); она является обобщением аналогичной теоремы А. А. Архангельского для топологических пространств, объявленной в работе [1] (теорема 2).

Определение 4. *Дизъюнктной суммой* пространств близости P_a будем называть пространство близости, множеством которого является объединение $P = \bigcup P_a$, причем считается $P_a \cap P_\beta = \emptyset$ при $a \neq \beta$, а произвольные два множества A и B объявляются близкими в том и только в том случае, когда найдется индекс a, для которого $A \cap P_a \delta B \cap P_a$.

Теорема 5. *Пространство близости секвенциально в том и только*

([6]) Ниже (следствие 3 из предложения 2.2) будет дано необходимое и достаточное условие секвенциальности, сходное с одним из критериев правильности ([6], теорема 6, C_2). Недостатком этого предложения, однако, является то, что в нем используется понятие секвенциального произведения произвольного (несчетного) числа метрических пространств.

в том случае, когда оно является образом дизъюнктной суммы метрических пространств при δ-непрерывном регулярном (7) *отображении.*

Лемма 2. *Образ секвенциального пространства при регулярном отображении есть секвенциальное пространство.*

Доказательство. Пусть $f:P \to Q$ регулярно, а пространство P секвенциально. Пусть $A \cup B \subset Q$ и $A\delta B$. $f^{-1}A\delta f^{-1}B$ и, следовательно, существуют сопредельные последовательности $\xi \subset f^{-1}A$ и $\eta \subset f^{-1}B$. Ввиду δ-непрерывности $f:P \to Q$ (предложение 1.2) получаем $f\xi \mathbf{n} f\eta$. Но $f\xi \subset A$ и $f\eta \subset B$, т. е. $A\delta B$ в смысле близости P''.

Доказательство теоремы 6. Достаточность условий теоремы ясна, т. к. дизъюнктная сумма секвенциальных и, в частности, метрических пространств, очевидно, секвенциальна.

Необходимость. Пусть S — произвольное секвенциальное пространство. Рассмотрим множество Θ всех пар его сопредельных последовательностей. Для каждой пары $\theta = (\xi, \eta) \in \Theta$ построим метрическое пространство K_θ, определенное на множестве $\xi \cup \eta$, положив расстояние между двумя его различными точками $x_i \in \xi$ и $y_i \in \eta$ равным $1/l$, где $l = \max\{j | x_j = x_i \& y_j = y_i\}$, а прочие расстояния — равными 1. Тождественное отображение $e_\theta: k_\theta \to S$ δ-непрерывно: если $\{v_i\}$ и $\{w_i\}$ — две сопредельные последовательности в K_θ, т. е. $\lim \varrho(v_i, w_i) = 0$, то $e_\theta v_i = x_{j_i}$ и $e_\theta w_i = y_{j_i}$, либо, наоборот, $e_\theta v_i = y_{j_i}$ и $e_\theta w_i = x_{j_i}$, причем $j_i \geqslant i$. Убедимся, что последовательности $\{e_\theta v_i\}$ и $\{e_\theta w_i\}$ сопредельны: в самом деле, каждая из них представляет собой объединение двух соответственных подпоследовательностей из ξ и η и, следовательно, в них не может быть далеких подпоследовательностей, стоящих на одинаковых местах.

Пусть P — дизъюнктная сумма всех K_θ (при $\theta \in \Theta$), а $e:P \to S$ — объединение отображений e_θ (т. е. при $p \in K_\theta$, $ep = e_\theta p$). Отображение e δ-непрерывно и регулярно. В самом деле, если $A \cap B \subset P$ и $A\delta B$, то найдется индекс θ, при котором $A \cap K_\theta \delta B \cap K_\theta$; $eA \supset e(A \cap K_\theta) = e_\theta(A \cap K_\theta)$ и $eB \supset e(B \cap K_\theta) = e_\theta(B \cap K_\theta)$, причем $e_\theta(A \cap K_\theta) \delta e_\theta(B \cap K_\theta)$ ввиду δ-непрерывности e_θ. Если же $C \cup D \subset S$ и $C\delta D$, то существуют сопредельные последовательности $\tau \subset C$ и $v \subset D$; $\zeta = (\tau, v) \in \Theta$; $e^{-1}C \supset e_\zeta^{-1}\tau$ и $e_\zeta^{-1}D \supset e_\zeta^{-1}v$, причем $e_\zeta^{-1}\tau \mathbf{n} e_\zeta^{-1}v$ в пространстве K_ζ.

Замечание. Прообраз каждой точки пространства S при отображении e пересекается с каждым слагаемым K_θ не более, чем по одной точке.

---

(7) $\varphi:P \to Q$ регулярно, если из $A\delta B$ в Q следует $\varphi^{-1}A\delta\varphi^{-1}B$. Регулярные отображения изучены в работе [7]; они представляют собой естественную аналогию предзамкнутым (иногда: псевдооткрытым) отображениям — см. [1].

Следствие. *Топологическое пространство X секвенциально тогда и только тогда, когда оно является образом метризуемого пространства при непрерывном предзамкнутом отображении.*

(Это и есть упоминавшаяся выше теорема А. А. Архангельского).

Доказательство. Пусть X — секвенциальное топологическое пространство. Введем в нем сопредельность $\mathfrak{T}$, полагая $\xi \mathbf{n} \eta$ в том и только в том случае, когда $\lim \xi = \lim \eta$, и построим отображение $e: \bigcup K_\theta \to \mathfrak{T}'$. Топология пространства $\bigcup K_\theta$ метризуема; регулярное отображение e предзамкнуто, т. к. произвольная открытая окрестность любого множества $e^{-1}z$ будет и его δ-окрестностью ([7], лемма 2, (e)).

§ 2. Последовательность ξ называется *сходящейся*, если $\xi \mathbf{n} \{a\}$ для некоторого a (это записывается $\lim \xi = a$).

В статье [3] Гёц определяет *фундаментальные* последовательности как сопредельные любой своей подпоследовательности и *полные* пространства — как пространства, в которых все фундаментальные последовательности сходятся. Там же ставится проблема изучения полноты и нахождения пополнений пространств сопредельности.

Определение 4. Секвенциальное пространство близости R будем называть *секвенциально полным* (коротко: n-полным), если совместимое с ним пространство сопредельности R' полно в смысле Гёца.

Секвенциальная полнота в значительной степени отличается от обычной полноты пространств близости, теория которой построена Смирновым [9]; тем не менее, некоторые их свойства аналогичны.

Теорема 6. *Полное секвенциальное пространство n-полно.*

Доказательство. Пусть $\xi = \{x_i\}$ — произвольная фундаментальная последовательность в полном пространстве P. Покажем, что фильтр с базисом $\mathfrak{F}_\xi = \{\{j | j > i\} | i\}$ есть фильтр Коши. Действительно, пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное равномерное покрытие и $\mathfrak{B}$ звездно вписано в $\mathfrak{U}$. Существует индекс k такой, что $x_r \in \mathrm{St}(x_s, \mathfrak{B})$ при произвольных $r, s \geqslant k$: в противном случае мы выделили бы из них подпоследовательности $\{x_{r_k}\}$ и $\{x_{s_k}\}$ такие, что $x_{r_k} \notin \mathrm{St}(x_{s_k}, \mathfrak{B})$ при любом k; ввиду фундаментальности ξ должно быть $\{x_{r_k}\}\mathbf{n}\{x_{s_k}\}$, но это невозможно в силу леммы 1. В частности, при $r > k$, $x_r \in \mathrm{St}(x_k, \mathfrak{B}) \subset U \in \mathfrak{U}$, т. е. весь остаток $\{x_r | r > k\}$ содержится в одном из элементов покрытия $\mathfrak{U}$.

Итак, $\mathfrak{F}_\xi$ является базисом фильтра Коши. Пространство P полно, поэтому фильтр $\mathfrak{F}_\xi$ имеет (единственную) точку прикосновения x. В частности, $x \in [\xi]$. Если η — подпоследовательность в ξ, то x является, очевидно, точкой прикосновения $\mathfrak{F}_\eta$, поэтому $x \in [\eta]$.

Таким образом, $\{x\}\mathbf{n}\xi$, т. е. $x = \lim \xi$.

Теорема доказана.

Примером n-полного, но неполного пространства близости может служить множество всех счетных трансфинитных чисел.

Следующая теорема является естественной аналогией теореме 1 из работы [7]:

Теорема 7. *Пусть пространства R и S секвенциальны, а δ-непрерывное отображение $f: R \to S$ таково, что $\{y\}\delta fA$ влечет $f^{-1}y\delta A$, и все прообразы $f^{-1}s$ секвенциально полны. Тогда если S n-полно, то и R n-полно.*

Доказательство. Пусть ξ — фундаментальная последовательность в R. Последовательность $f\xi$ тоже фундаментальна; пусть $a = \lim f\xi$. По предположению $f^{-1}a\delta\xi$, и, ввиду фундаментальности ξ, $f^{-1}a$ близко к любой ее подпоследовательности; докажем, что $f^{-1}a$ содержит подпоследовательность, сопредельную ξ.

Предположим противное. Тогда $f^{-1}a \cap \xi$ конечно (как отмеченное множество); $f^{-1}a\,\delta\,\xi \setminus f^{-1}a$, поэтому существуют сопредельные последовательности $\eta \subset f^{-1}a$ и $\zeta \subset \xi \setminus f^{-1}a$. Если ζ конечно (как абстрактное множество), то в η есть подпоследовательность η_0, сходящаяся к некоторой $z \in \zeta$, $\eta_0 \subset f^{-1}a$ и фундаментальна, однако $\lim \eta_0 \notin f^{-1}a$ вопреки n-полноте пространства $f^{-1}a$.

Итак, ζ бесконечно; значит $\zeta \mathbf{n} \xi$ и, следовательно, $\eta \mathbf{n} \xi$. В силу n-полноты пространства $f^{-1}a$, содержащего η, существует $c = \lim \eta = \lim \xi$.

Со всяким пространством близости R можно ассоциировать топологическое пространство $\bar{R}$, в котором замкнутыми считаются те и только те множества, которые содержат все свои близкие точки. Легко устанавливается следующее

Предложение 2.1. *Замкнутые множества n-полных пространств n-полны; n-полное пространство замкнуто во всяком объемлющем секвенциальном пространстве.*

Разумеется, n-полные пространства не обязательно замкнуты в несеквенциальных расширениях: например, $W(\omega_1)$ плотно в $W(\omega_1+1)$.

Нас будет интересовать вопрос, в каких случаях для данного секвенциального пространства S существует n-полное пространство T, имеющее плотное подпространство, эквиморфное S.

Определение 5. Секвенциальное пространство R будем называть *счетно-регулярным*, если для любых двух далеких последовательностей $\{x_i\}\bar{\delta}\{y_i\}$ его точек существует δ-непрерывная функция $\varphi: R \to I = [0; 1]$, разделяющая некоторые две подпоследовательности $\{x_{i_j}\}$ и $\{y_{i_j}\}$ (т. е. $\varphi x_{i_j} = 0$, $\varphi y_{i_j} = 1$ при любом j).

Предложение 2.2. *Пространство близости эквиморфно вкладывается в $\square$-произведение отрезков тогда и только тогда, когда оно счетно-регулярно.*

Доказательство. Достаточность. Пусть S — счетно-регулярное пространство и Ψ — какое-нибудь множество δ-непрерывных функций $\psi : S \to I$ такое, что для любых далеких последовательностей $\{x_i\}\bar{\delta}\{y_i\}$ существует функция $\psi \in \Psi$, разделяющая какие-нибудь их соответственные подпоследовательности.

Обозначим через $k : S \to \overset{\square}{\Pi} I_\psi$ сочетание всех $\psi \in \Psi$. Очевидно, что k взаимно-однозначно и δ-непрерывно. Покажем, что оно и δ-открыто [7]. Итак, пусть $A \cup B \subset S$ и $A\bar{\delta}B$. Пусть $\xi \subset kA$ и $\eta \subset kB$ — произвольные последовательности. $k^{-1}\xi \subset A$ и $k^{-1}\eta \subset B$, поэтому $k^{-1}\xi \bar{\mathbf{n}} k^{-1}\eta$. В силу аксиомы $\square$ найдутся далекие подпоследовательности ζ и θ, а в них — подпоследовательности $\varkappa$ и λ такие, что существует $\varphi \in \Psi$, для которого $\varphi\varkappa = 0$ и $\varphi\lambda = 1$. Значит, проекции ξ и η на сомножитель I_φ не сопредельны, т. е. $\xi \bar{\mathbf{n}} \eta$. Тем самым $kA\bar{\delta}kB$, и вложение $k : S \subset \overset{\square}{\Pi} I_\psi$ — эквиморфизм.

Необходимость. Пусть $S \subset \overset{\square}{\Pi} I_\psi$. S секвенциально как подмножество секвенциального пространства. Пусть $\xi \cup \eta \subset S$ и $\xi \mathbf{n} \eta$. Существует индекс α, для которого проекции $\pi_\alpha\xi$ и $\pi_\alpha\eta$ не сопредельны, т. е. имеют далекие подпоследовательности $\theta\bar{\delta}\zeta$. Но всякие два далеких множества в отрезке I можно разделить δ-непрерывной функцией.

Следствие 1. *Все секвенциальные счетно-регулярные пространства уплотняются на (правильные) пространства близости, удовлетворяющие аксиоме* Б5.

Действительно, $\overset{\square}{\Pi} I_\alpha > \overset{\times}{\Pi} I_\alpha$; свойство „близостной нормальности" наследственно, и поэтому $\overset{\square}{\Pi} I_\alpha \supset S > S_0 \subset \overset{\times}{\Pi} I_\alpha$; секвенциальные пространства правильны — значит $S > S_0$!

Следствие 2. *Произведение $\overset{\square}{\Pi} I_\alpha$ не всегда обладает аксиомой* Б5: *оно (эквиморфно) содержит, например, пространство $E^\beta \square E^\beta$.*

Следствие 3. *Пространство близости, удовлетворяющее аксиоме* Б5, *секвенциально в том и только в том случае, когда сочетание любого числа δ-непрерывных отображений в метрические пространства δ-непрерывно как отображение в их секвенциальное произведение.*

Заметим, что если заменить секвенциальное произведение на близостное [6], то получится необходимое и достаточное условие правильности.

Теорема 8. *Всякое счетно-регулярное пространство S имеет секвенциально полное счетно-регулярное расширение; среди этих рас-*

ширений есть наибольшее [8] $\mathrm{sc}\,S$ *— в том смысле, что если* T *— какое-нибудь другое* n*-полное (секвенциальное) расширение, то существует —* δ*-непрерывное отображение* $e:\mathrm{sc}\,S \to T$, *тождественное на* T.

Пространство $\mathrm{sc}\,S$ будем называть *секвенциальным пополнением* пространства S.

Лемма 3. $\square$*-произведение* n*-полных пространств* n*-полно.*

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 8. Пусть S — произвольное счетно-регулярное пространство. Возьмем в качестве системы Ψ множество всех δ-непрерывных функций $\{\varphi_a : S \to I_a | a\}$; можно считать, что $S \subset \overset{\square}{\Pi} I_a$. Замыкание $[S]$ в этом произведении и есть $\mathrm{sc}S$.

Действительно, пусть T — какое-нибудь n-полное секвенциальное расширение пространства S. Вложим T в произведение $\overset{\square}{\Pi} I_\gamma$: $S \subset T \subset \overset{\square}{\Pi} I_\gamma$. Проекции $\pi_\gamma : S \to I_\gamma$ образуют расчленяющую систему функций Φ; $\Phi \subset \Psi$. Пусть k — сочетание всех функций из Ψ, а l — всех функций из Φ. $\mathrm{Im}\,k = \mathrm{sc}\,S$, $\mathrm{Im}\,l = I$; сужение проекции $\pi : \overset{\square}{\Pi} I_a \to \overset{\square}{\Pi} I_\gamma$ на множество $\mathrm{sc}\,S$ и есть искомое отображение. (Заметим, что, конечно же, $\pi\,\mathrm{sc}\,S \subset I$, т. к. отображение π непрерывно).

Теорема 9. δ*-непрерывное отображение* $f:R \to S$ *счетно-регулярных пространств имеет единственное* δ*-непрерывное распространение* $F:\mathrm{sc}R \to \mathrm{sc}\,S$.

Доказательство. Будем считать что $R \subset \mathrm{sc}R \subset \overset{\square}{\Pi} I_a$, а $S \subset \mathrm{sc}\,S \subset \overset{\square}{\Pi} I_\gamma$. Пусть $\pi_\gamma : S \to I_\gamma$ — проекция на сомножитель γ. Отображение $\pi_\gamma f : R \to I_\gamma$ можно продолжить в отображение $\chi:\mathrm{sc}\,R \to I_\gamma$ (и вообщее любое отображение $\varphi : P \to I$ можно, по построению, продолжить в отображение $\chi:\mathrm{sc}P \to I$); сочетание их $h = (g_\gamma):\mathrm{sc}R \to \overset{\square}{\Pi} I_\gamma$, рассмотренное на R, есть f.

Замечание. Таким образом, n-полное расширение T пространства R тогда и только тогда является секвенциальным пополнением, когда любую (ограниченную) δ-непрерывную функцию, определенную на R, можно продолжить в δ-непрерывную функцию расширения T.

Теорема 10. *Если среди* n*-полных расширений пространства* P *есть удовлетворяющее аксиоме* Б5, *то оно совпадает с* $\mathrm{sc}P$; *в этом*

[8] Если пространство S метризуемо, то $\mathrm{sc}\,S$ является единственным его секвенциально полным счетно-регулярным расширением; однако уже дизъюнктная сумма счетного числа интервалов имеет много таких расширений.

случае секвенциальное пополнение $\mathrm{sc}P$ *является подмножеством пополнения* $\overline{P}$ (см. [9]) *нашего пространства.*

Доказательство. Пусть Q — δ-нормальное n-полное расширение пространства P. P плотно в Q, и поэтому бикомпактное расширение $\overline{P}$ является одновременно бикомпактным расширением пространства $Q: P \subset Q \subset \overline{P}$. Возьмем произвольную точку $p \in Q$. $p \in [P]$, т. е. (ввиду δ-нормальности Q) $\{p\}\delta P$. Значит существует последовательность $\xi \subset P$, сходящаяся к $p: p = \lim \xi$. Если $\mathfrak{U}$ — равномерное покрытие пространства $\overline{P}$, то в последовательности ξ найдется элемент x_i такой, что $\{x_j \in \xi | j > i\}$ содержится в некотором элементе этого покрытия (см. доказательство теоремы 6), т. е. система $\{\{x_j \in \xi | j > i\} | i\}$ является базисом фильтра Коши; он имеет единственную точку прикосновения в $\overline{P}$, к которой и сходится последовательность ξ. Но фундаментальная последовательность в $\overline{P}$ — близостно нормальном пространстве — не может сходится к двум различным точкам; таким образом, $p = \lim \xi \in \overline{P}$ и, следовательно, $Q \subset \overline{P}$.

Для того, чтобы доказать максимальность n-полного расширения Q, достаточно убедиться, что любую δ-непрерывную функцию $\psi: P \to I$ можно продолжить в δ-непрерывную функцию $\Psi: Q \to I$. Но известно, что любое δ-непрерывное отображение $f: P \to A$ пространств близости (удовлетворяющих аксиоме Б5) можно продолжить в δ-непрерывное отображение $F: \overline{P} \to \overline{A}$ их пополнений ([9], теоремы 8 и 9).

В связи с этим интересен вопрос: Всегда ли выполняется аксиома Б5 в секвенциальном пополнении, если она выполняется в пополняемом пространстве? Мы можем доказать лишь, что $\mathrm{sc}P$ можно уплотнить на некоторое расширение пространства P, лежащее в его пополнении $\overline{P}$ (причем на P это уплотнение будет, конечно, эквиморфизмом).

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору Ю. М. Смирнову, обратившему мое внимание на эти вопросы и предложившему способ введения близости в пространство сопредельности и наоборот. Ему же принадлежит используемый здесь способ введения топологии в обобщенное пространство близости и идея построения секвенциального пополнения. За всё это я ему очень признателен.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Архангельский, *Некоторые типы факторных отображений и связи между классами топологических пространств*, Доклады Академии Наук СССР 153 (1963), стр. 743-746.

[2] A. Goetz, *A notion of uniformity for L-spaces of Fréchet*, Colloquium Mathematicum 9 (1962), стр. 223-231.

[3] — *A notion of uniformity for L-spaces of Fréchet*, General topology and its relations to modern Analysis and Algebra, Prague 1961, стр. 177-178.

[4] В. А. Ефремович, *Инфинитезимальные пространства*, Доклады Академии Наук СССР 76 (1951), стр. 341-343.

[5] — *Геометрия близости*, Математический сборник 31 (1952), стр. 189-200.

[6] В. З. Поляков, *Правильность, произведение и спектры пространств близости*, Доклады Академии Наук СССР 154 (1964), стр. 51-54.

[7] — *Открытые отображения пространств близости*, ibidem 155 (1964), стр. 1014-1017.

[8] Ю. М. Смирнов, *О пространствах близости*, Математический сборник 31 (1952), стр. 543-574.

[9] — *О полноте пространств близости*, Труды Московского Математического Общества 3 (1954), стр. 271-306.

[10] P. S. Urysohn, *Sur les classes (L) de M. Fréchet*, L'Enseignement Mathématique 25 (1926), стр. 77-83.

[11] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928.

Reçu par la Rédaction le 17. 11. 1964