COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XIII 1964 FASC. 1

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОДПРОСТРАНСТВ И БАЗИСОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. И. ГУРАРИЙ (ХАРЬКОВ)

В настоящей заметке изучаются некоторые величины, характеризующие расположение подпространств в банаховом пространстве. Эти рассмотрения связаны с вопросами существования базисов, обладающих определенными свойствами, в конечномерных и бесконечномерных банаховых пространствах. Такого типа величины впервые рассматривались Боненблюстом [2].

1. Пусть R и S — множества в банаховом пространстве E, P и Q — замыкания их линейных оболочек. Величину

$$\widehat{(R, S)} = \inf_{x \in P, \|x\|=1} \varrho(x, Q)$$

будем называть *наклоном* R к S. Нетрудно показать, что

$$\widehat{(R, S)} = \frac{1}{\|A\|}, \tag{1}$$

где A оператор проектирования из $P+Q$ на P, аннулирующий Q. Действительно,

$$\widehat{(R, S)} = \inf_{x \in P, y \in Q} \frac{\|x+y\|}{\|x\|} = \frac{1}{\sup\limits_{x \in P, y \in Q} \|x\|/\|x+y\|} = \frac{1}{\|A\|}.$$

2. *Индексом* последовательности $\{e_i\}$ назовем величину

$$\gamma_{\{e_i\}} = \inf_{i<j} \widehat{(P_{1,i}, P_{i+1,j})},$$

где через $P_{i,j}$ обозначена линейная оболочка над элементами $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_j$. *Взаимным индексом* этой последовательности будем называть величину

$$\gamma'_{\{e_i\}} = \inf_{i<j} \widehat{(P_{i+1,j}, P_{1,i})}. \tag{2}$$

3. *Индексом* банахова пространства E назовем величину

$$\gamma(E) = \sup_{\{e_i\}} \gamma_{\{e_i\}},$$

где $\{e_i\}$ пробегает всевозможные полные системы в E. Из результатов Гринблюма [3] вытекает, что для того, чтобы в сепарабельном банаховом пространстве E существовал базис, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(E) > 0$.

4. *Индексом размерности* назовем величину

$$\gamma(n) = \inf_{B^{(n)}} \gamma(B^{(n)}),$$

где $B^{(n)}$ — пробегает всевозможные n-мерные банаховы пространства.

5. *Упакованностью* подпространства P в пространстве E назовем величину

$$U(P, E) = \sup_{Q} (\widehat{P, Q}),$$

где Q пробегает всевозможные прямые дополнения к P в E (если P недополняемо в E, то естественно считать $U(P, E) = 0$).

6. *k-й упакованностью* банахова пространства E ($\dim E > k$) будем называть величину

$$U_{(k)}(E) = \sup_{B^{(k)}} (\widehat{B^{(k)}, E}),$$

где $B^{(k)}$ пробегает всевозможные k-мерные подпространства в E. Кроме того будем употреблять обозначение

$$U^{(k)}(E) = \sup_{B_{(k)}} U(B_{(k)}, E),$$

где $B_{(k)}$ пробегает всевозможные подпространства с k-мерным дефектом в E.

7. Определим, наконец, величины

$$U_{(k)}(n) = \inf_{B^{(n)}} U_{(k)}(B^{(n)}), \quad U^{(k)}(n) = \inf_{B^{(n)}} U^{(k)}(B^{(n)}), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3}$$

где $B^{(n)}$ пробегает всевозможные n-мерные банаховы пространства.

Очевидно, что

$$U_{(1)}(n) = 1, \qquad U_{(k)}(n) = U^{(n-k)}(n), \qquad \gamma(n) \leqslant U_{(k)}(n)$$

для $n \geqslant 2$ и $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Как показал Боненблюст [2] ([1]) (см. также [4], [6]),

$$U_{(k)}(n) < 1 \quad \text{для} \quad k = 2, 3, \ldots, n-1; \; n = 3, 4, \ldots \tag{3'}$$

Перейдем к получению некоторых оценок для величины $U^{(1)}(n)$ и тем самым для величины $\gamma(n)$.

Обозначим через $B_1 \oplus B_2$ произведение пространств B_1 и B_2, т. е. пространство всех пар (x_1, x_2), где $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$ с нормой

$$\|(x_1, x_2)\|_{\oplus} = \sqrt{\|x_1\|_1^2 \times \|x_2\|_2^2}$$

($\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_{\oplus}$ обозначены соответственно нормы в пространствах B_1, B_2 и $B_1 \oplus B_2$).

Легко устанавливается следующая

Лемма. *Если* $x_i \in B_i$, $y_i \in B_i$, $\|y_i\| \leqslant a_i \|x_i\|$, $a_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, *то*

$$\|(y_1, y_2)\|_{\oplus} \leqslant \max\{a_1, a_2\} \|(x_1, x_2)\|_{\oplus}.$$

Теорема 1. *Для любых натуральных n_1 и n_2 имеет место неравенство*

$$U^{(1)}(n_1 + n_2) \leqslant \max\{U^{(1)}(n_1), U^{(1)}(n_2)\}.$$

Доказательство. Пусть B_1 и B_2 произвольные банаховы пространства. Покажем, что для пространства $B = B_1 \oplus B_2$ выполнено неравенство

$$U^{(1)}(B) \leqslant \max\{U^{(1)}(B_1), U^{(1)}(B_2)\}. \tag{4}$$

Предположим противное. Тогда найдется подпространство $P \subset B$ с одномерным дефектом в B и элемент $h \in B$, $h \neq \theta$, такие, что

$$\widehat{(P, h)} > \max\{U^{(1)}(B_1), U^{(1)}(B_2)\}. \tag{5}$$

Условимся считать B_1 и B_2 подпространствами в B, состоящими из элементов вида (x, θ), $x \in B_1$, $\theta \in B_2$, или соответственно вида (θ, x), $x \in B_2$, $\theta \in B_1$, и обозначим $P_i = P \cap B_i$, $i = 1, 2$. Очевидно, P_i имеет не более чем одномерный дефект в B_i, $i = 1, 2$. Пусть $h = (h_1, h_2)$, $h_1 \in B_1$, $h_2 \in B_2$. Так как

$$\widehat{(P_i, h_i)} \leqslant U^{(1)}(B_i), \quad i = 1, 2,$$

то найдутся элементы $x \in B_1$ $(i = 1, 2)$ такие, что выполнены неравенства

$$\|x_1 + h_1\|_1 \leqslant U^{(1)}(B_1)\|x_1\|_1, \quad \|x_2 + h_2\|_2 \leqslant U^{(1)}(B_2)\|x_2\|_2.$$

([1]) Боненблюст рассматривал для данного n-мерного пространсгва B величины $a_k(B)$ $(k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1)$ равные нижней грани норм проекций на всевозможные k-мерные подпространстра пространства B. Очевидно, что $a_k(B) = [U_{(k)}(B)]^{-1}$.

Но тогда на основании леммы имеем

$$\|(x_1+h_1,\, x_2+h_2)\|_{\oplus} \leqslant \max\{U^{(1)}(B_1),\, U^{(1)}(B_2)\}\|(x_1,\, x_2)\|_{\oplus}.$$

Обозначив $(x_1, x_2) = x$, перепишем это неравенство в виде

$$\|x+h\|_{\oplus} \leqslant \max\{U^{(1)}(B_1),\, U^{(1)}(B_2)\}\,\|x\|_{\oplus};$$

т. к. очевидно $x \in P$, то отсюда нолучаем

$$(\widehat{P,\, h}) \leqslant \max\{U^{(1)}(B_1),\, U^{(1)}(B_2)\},$$

что противоречит (5). Неравенство (4), а вместе с ним, как легко видеть, и теорема доказаны.

Теорема 2. *Существует абсолютная постоянная $C < 1$ такая, что*

$$\gamma(n) \leqslant U^{(1)}(n) < C, \qquad n > 2.$$

Доказательство следует из теоремы 1, если положить $C = \max\{U^{(1)}(3),\, U^{(1)}(4),\, U^{(1)}(5)\}$ и учесть, что $C < 1$ на основании (3'):

Теорема 3. *Существует бесконечномерное сепарабельное банахово пространство, в котором норма любого проектора на произвольное гиперподпространство больше $N > 1$.*

Доказательство. Для какого-либо натурального $k > 2$ найдется k-мерное банахово пространство, для которого $U^{(1)}(B^{(k)}) = U^{(1)}(k)$ (это вытекает из того, что относительно некоторой топологии ([1], стр. 211) множество всех k-мерных банаховых пространств является компактом, причем $U^{(1)}(B)$ есть непрерывная функция на этом компакте). Таким же путем, как при доказательстве теоремы 1 проверяется, что если положить

$$E = (B^{(k)} \oplus B^{(k)} \oplus \ldots)_{C_0}$$

(по поводу обозначений см., например, [1]), то

$$U^{(1)}(E) \leqslant U^{(1)}(k) < 1$$

и в силу (1) теорема 3 доказана.

Следствие. *Существует бесконечномерное сепарабельное банахово пространство, в котором взаимный индекс любой полной системы меньше $C < 1$, причем в качестве C можно взять $C = U^{(1)}(k)$ при каком-либо натуральном $k > 2$.*

Тем не менее пока остается открытым вопрос о существовании бесконечномерного сепарабельного банахова пространства [3], в котором для любой полной системы $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\gamma_{\{e_i\}_{i=1}^{\infty}} < C < 1$$

(этот вопрос решен положительно [5], если иметь в виду лишь неравенство $\gamma_{\{e_i\}_{i=1}^{\infty}} < 1$).

Дальнейшие рассмотрения введенных величин мы предполагаем провести в отдельной статье.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность М. И. Кадецу и А. Л. Пелчинскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Банах, *Курс функціонального аналізу,* Київ 1948.

[2] H. F. Bohnenblust, *Subspaces of $l_{p,n}$ spaces,* American Journal of Mathematics 63 (1941), стр. 64-72.

[3] М. М. Гринблюм, *Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа* (B), Доклады Академии Наук СССР 31 (1941), № 5, стр. 248-432.

[4] В. И. Гурарий, *О наклонах подпространств и существовании ортогонального базиса в пространстве Банаха,* Учёные записки Харьковского математического общества 30 (1964), стр. 34-37.

[5] — *О базисах в пространствах непрерывных функций,* Доклады Академии Наук СССР 148 (1963), № 3, стр. 493-495.

[6] М. З. Соломяк, *Об ортогональном базисе в пространстве Банаха,* Вестник Ленинградского университета, серия мат. мех. астр., 1 (1957), стр. 27-36.

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1964